

Расчетная работа по теме «Ряды»

Задача 1. Исследуйте ряды на сходимость.

1. а) $\frac{5}{1} + \frac{5^2}{2^5} + \frac{5^3}{3^5} + \dots$ б) $\frac{1}{1+1^2} + \frac{2}{1+2^2} + \frac{3}{1+3^2} + \dots$
2. а) $\frac{5}{1 \cdot 3} + \frac{5^2}{3 \cdot 3^2} + \frac{5^3}{5 \cdot 3^3} + \dots$ б) $\frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \dots$
3. а) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \dots$ б) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots$
4. а) $\frac{4 \cdot 1!}{1} + \frac{4^2 \cdot 2!}{2^2} + \frac{4^3 \cdot 3!}{3^3} + \dots$ б) $\frac{1}{\sqrt{2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2+2^2}} + \frac{1}{\sqrt{2+3^2}} + \dots$
5. а) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2\sqrt{2}} + \dots$ б) $\frac{1}{101} + \frac{2}{104} + \frac{3}{109} + \dots$
6. а) $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{2 \cdot 3^2}} + \frac{9}{\sqrt{3 \cdot 3^3}} + \dots$ б) $\frac{1}{2^3 \sqrt{\ln 2}} + \frac{1}{3^3 \sqrt{\ln 2}} + \frac{1}{4^3 \sqrt{\ln 2}} + \dots$
7. а) $\frac{7}{1 \cdot 3} + \frac{7^2}{2 \cdot 3^2} + \frac{7^3}{3 \cdot 3^3} + \dots$ б) $\frac{1}{3(\ln 3)^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{4(\ln 3)^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{5(\ln 3)^{\frac{2}{3}}} + \dots$
8. а) $\frac{3}{2 \cdot 3} + \frac{3^2}{2^2 \cdot 5} + \frac{3^3}{2^3 \cdot 7} + \dots$ б) $1 + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{10}} + \dots$
9. а) $1 + \frac{2}{2^2} + \frac{4}{3^3} + \frac{8}{4^4} + \dots$ б) $1 + \frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \frac{7}{16} + \dots$
10. а) $\frac{2}{4 \cdot 1!} + \frac{2^2}{5 \cdot 2!} + \frac{2^3}{6 \cdot 3!} + \dots$ б) $\frac{1}{9+1^2} + \frac{1}{9+2^2} + \frac{1}{9+3^2} + \dots$
11. а) $\frac{\sqrt{1!}}{3} + \frac{\sqrt{2!}}{3^2} + \frac{\sqrt{3!}}{3^3} + \dots$ б) $\frac{1}{10 \ln^3 10} + \frac{1}{20 \ln^3 20} + \dots$
12. а) $\frac{3 \cdot 1!}{1} + \frac{3^2 \cdot 2!}{2^2} + \frac{3^3 \cdot 3!}{3^3} + \dots$ б) $\frac{1}{3^2 - 1} + \frac{1}{5^2 - 1} + \frac{1}{7^2 - 1} + \dots$
13. а) $\frac{2 \cdot 1!}{1} + \frac{2^2 \cdot 2!}{2^2} + \frac{2^3 \cdot 3!}{3^3} + \dots$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{9+n^4}$
14. а) $\frac{1}{e} + \frac{8}{e^2} + \frac{27}{e^3} + \dots$ б) $e + \frac{e^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} + \frac{e^{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} + \frac{e^{\sqrt{4}}}{\sqrt{4}} + \dots$
15. а) $\frac{3}{2!} + \frac{9}{4!} + \frac{27}{6!} + \dots$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$
16. а) $\frac{2}{1 \cdot 5} + \frac{3^2}{2^2 \cdot 5^2} + \frac{4^3}{3^3 \cdot 5^3} + \dots$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{1+n^2}$
17. а) $\frac{10}{1!} + \frac{100}{2!} + \frac{1000}{3!} + \dots$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{1+2n^2}$
18. а) $\frac{7 \cdot 1!}{1} + \frac{7^2 \cdot 2!}{2^2} + \frac{7^3 \cdot 3!}{3^3} + \dots$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 4n + 10}$
19. а) $\frac{100}{1!} + \frac{100^2}{2!} + \frac{100^3}{3!} + \dots$ б) $\frac{1}{2\sqrt{\ln 2}} + \frac{1}{3\sqrt{\ln 3}} + \frac{1}{4\sqrt{\ln 4}} + \dots$
20. а) $\frac{2^2}{3} + \frac{2^3}{6^2} + \frac{2^4}{9^3} + \dots$ б) $\frac{1}{3 \ln^3 3} + \frac{1}{4 \ln^3 4} + \frac{1}{5 \ln^3 5} + \dots$

21. а) $\frac{1!}{3!} + \frac{2!}{6!} + \frac{3!}{9!} + \dots$ б) $\frac{5}{1} + \frac{5}{4} + \frac{5}{7} + \dots$
22. а) $\frac{7^2}{1!} + \frac{7^4}{3!} + \frac{7^6}{5!} + \dots$ б) $\frac{5}{1+1^2} + \frac{10}{1+2^2} + \frac{15}{1+3^2} + \dots$
23. а) $\frac{3}{4 \cdot 3!} + \frac{3^2}{4^2 \cdot 4!} + \frac{3^3}{4^3 \cdot 5!} + \dots$ б) $\frac{1}{3 \ln^2 3} + \frac{1}{5 \ln^2 5} + \frac{1}{7 \ln^2 7} + \dots$
24. а) $\frac{1}{3!} + \frac{2^2}{4!} + \frac{3^2}{5!} + \dots$ б) $\frac{1+2}{1} + \frac{2+2}{2^2} + \frac{3+2}{3^2} + \dots$
25. а) $\frac{3 \cdot 1!}{1} + \frac{3^2 \cdot 3!}{2^2} + \frac{3^3 \cdot 5!}{3^2} + \dots$ б) $\frac{4}{1+3^2} + \frac{4}{1+5^2} + \frac{4}{1+7^2} + \dots$
26. а) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{8}} + \dots$ б) $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt[3]{\frac{1}{5}} + \sqrt[4]{\frac{1}{10}} + \sqrt[5]{\frac{1}{17}} + \dots$
27. а) $\frac{6 \cdot 2}{3!} + \frac{6^2 \cdot 3}{4!} + \frac{6^3 \cdot 4}{5!} + \dots$ б) $1 + \frac{2}{5} + \frac{3}{25} + \frac{4}{125} + \dots$
28. а) $1 + \frac{1 \cdot 3}{4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{9} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{16} + \dots$ б) $\frac{2}{3} + \left(\frac{3}{8}\right)^2 + \left(\frac{4}{13}\right)^3 + \dots$
29. а) $\frac{5}{1!} + \frac{5^2 \cdot 2^2}{2!} + \frac{5^2 \cdot 3^2}{3!} + \dots$ б) $0,5 + 0,05 + 0,005 + \dots$
30. а) $\frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{9}{4 \cdot 7} + \frac{27}{7 \cdot 10} + \dots$ б) $\frac{3}{12} + \frac{6}{102} + \frac{9}{1002} + \dots$
31. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(1+2n)!}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+n) \ln^2(n+1)}$
32. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2$
33. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^n n!}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1000n+1}$

Задача 2. Исследуйте ряд на абсолютную и условную сходимость.

1. $1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \dots$ 2. $1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots$ 3. $\frac{1}{2 \ln^2 2} - \frac{1}{3 \ln^2 3} + \frac{1}{4 \ln^2 4} - \dots$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \frac{n}{n+1}$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$ 6. $2 - \frac{2}{4} + \frac{2}{9} - \frac{2}{16} + \dots$ 7. $\frac{1}{2^5} - \frac{2}{2^6} + \frac{3}{2^7} - \dots$
8. $1 - \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+8} - \frac{1}{1+27} + \dots$ 9. $\frac{1}{3} - \frac{4}{9} + \frac{9}{27} - \frac{16}{81} + \dots$ 10. $\frac{1}{2} - \frac{4}{5} + \frac{7}{8} - \frac{10}{11} + \dots$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2 + 4n + 8}$ 12. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{4n^2 - 1}$ 13. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (1 + (0,1)^n)$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2}{n^2 + n + 1}$ 15. $\frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{15} - \frac{1}{24} + \dots$ 16. $\left(\frac{3}{4}\right)^3 - \left(\frac{6}{7}\right)^3 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 - \dots$
17. $\frac{1}{e} - \frac{8}{e^2} + \frac{27}{e^3} - \dots$ 18. $1 - \frac{2}{2^2} + \frac{4}{3^3} - \frac{8}{4^4} + \dots$ 19. $1 - \frac{2}{1!} + \frac{4}{2!} - \frac{8}{3!} + \dots$
20. $-\frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} - \dots$ 21. $1 - \frac{2}{7} + \frac{3}{13} - \frac{4}{19} + \dots$ 22. $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{7}\right)^2 - \dots$

$$\begin{array}{lll}
23. \frac{21}{3} - \frac{41}{9} + \frac{61}{27} - \dots & 24. 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{9}} - \frac{1}{\sqrt{13}} + \dots & 25. 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \dots \\
26. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n+2}}{n^n} & 27. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} & 28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n^{n+1}} \\
29. \frac{1}{e} - \frac{1}{2e^2} + \frac{1}{3e^3} - \dots & 30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n\sqrt{n-1}} & 31. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2n+1} \\
32. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n} & 33. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n^2}{n!}
\end{array}$$

Задача 3. Определите интервал абсолютной сходимости ряда и исследуйте сходимость ряда на концах интервала.

$$\begin{array}{ll}
1. 1 + \frac{2x}{3^2\sqrt{3}} + \frac{4x^2}{5^2\sqrt{3^2}} + \frac{8x^3}{7^2\sqrt{3^3}} + \dots & 2. \frac{x}{7} + \frac{x^2}{2 \cdot 7^2} + \frac{x^3}{3 \cdot 7^3} + \dots \\
3. 1 + \frac{x}{3 \cdot 2} + \frac{x^2}{3^2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3^3 \cdot 4} + \dots & 4. \frac{x}{e} + \frac{x^2}{e^2} + \frac{x^3}{e^3} + \dots \\
5. \frac{2x-3}{1} + \frac{(2x-3)^2}{3} + \frac{(2x-3)^3}{5} + \dots & 6. \frac{2x+1}{1} + \frac{(2x+1)^2}{4} + \frac{(2x+1)^3}{7} + \dots \\
7. \frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \dots & 8. \frac{x+1}{1} + \frac{(x+1)^2}{2 \cdot 4} + \frac{(x+1)^3}{3 \cdot 4^2} + \dots \\
9. \frac{x-3}{2 \cdot 5} + \frac{(x-3)^2}{3 \cdot 5^2} + \frac{(x-3)^3}{4 \cdot 5^3} + \dots & 10. 5x + \frac{5^2 x^2}{2!} + \frac{5^3 x^3}{3!} + \dots \\
11. x + (2x)^2 + (3x)^3 + (4x)^4 + \dots & 12. \frac{2x}{\sqrt{5 \cdot 5}} + \frac{4x^2}{\sqrt{9 \cdot 5^2}} + \frac{8x^3}{\sqrt{13 \cdot 5^3}} + \dots \\
13. \frac{x+1}{1 \cdot 2} + \frac{(x+1)^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{(x+1)^3}{3 \cdot 2^3} + \dots & 14. \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right) + \frac{2}{3} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \dots \\
15. \frac{x}{5\sqrt{2}} + \frac{x^3}{5^2\sqrt{3}} + \frac{x^5}{5^3\sqrt{4}} + \dots & 16. \frac{x^2}{3 \cdot 2\sqrt{2}} + \frac{x^4}{3^2 \cdot 3\sqrt{3}} + \frac{x^6}{3^3 \cdot 4\sqrt{4}} + \dots \\
17. x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots & 18. \frac{x-1}{1} + \frac{(x-1)^2}{3^2} + \frac{(x-1)^3}{5^3} + \dots \\
19. \frac{2x-5}{1} + \frac{(2x-5)^2}{3} + \frac{(2x-5)^3}{5} + \dots & 20. \frac{x+2}{1} + \frac{(x+2)^2}{2^2} + \frac{(x+2)^3}{3^3} + \dots \\
21. \frac{2^5 x^2}{3} + \frac{3^5 x^4}{5} + \frac{4^5 x^6}{7} + \dots & 22. \frac{x+2}{3 \cdot 3} + \frac{(x+2)^2}{5 \cdot 3^2} + \frac{(x+2)^3}{7 \cdot 3^3} + \dots \\
23. \frac{(x+1)^2}{1} + \frac{(x+1)^4}{2} + \frac{(x+1)^6}{3} + \dots & 24. \frac{x-7}{4} + \frac{(x-7)^3}{4^2} + \frac{(x-7)^5}{4^3} + \dots \\
25. \frac{(x-1)^2}{1 \cdot 9} + \frac{(x-1)^4}{2 \cdot 9^2} + \frac{(x-1)^6}{3 \cdot 9^3} + \dots & 26. \frac{(x-10)}{1!} + \frac{(x-10)^3}{3!} + \frac{(x-10)^5}{5!} + \dots \\
27. \frac{(x-2)}{1 \cdot 3} + \frac{(x-2)^2}{5 \cdot 3^2} + \frac{(x-2)^3}{9 \cdot 3^3} + \dots & 28. \frac{2-x}{2 \cdot 5^2} + \frac{(2-x)^2}{3 \cdot 5^3} + \frac{(2-x)^3}{4 \cdot 5^4} + \dots \\
29. \frac{x}{1} + \frac{2x^3}{5^2} + \frac{2^2 x^5}{9^2} + \frac{2^3 x^7}{13^2} + \dots & 30. \frac{x+2}{5 \cdot 5} + \frac{(x+2)^3}{15 \cdot 5^2} + \frac{(x+2)^5}{25 \cdot 5^3} + \dots \\
31. \frac{(x+3)}{2!} + \frac{(x+3)^3}{4!} + \frac{(x+3)^5}{6!} + \dots & 32. \frac{2^3 x^2}{4} + \frac{3^3 x^4}{6} + \frac{4^3 x^6}{8} + \dots \\
33. \frac{x+4}{2 \cdot 3} + \frac{(x+4)^2}{3 \cdot 3^2} + \frac{(x+4)^3}{4 \cdot 3^3} + \dots
\end{array}$$

Задача 4.

1. Вычислите $\sqrt[3]{65}$ с точностью до 0,001. 2. Разложите в ряд по степеням x функцию $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$.
3. Разложите в ряд по степеням x функцию $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$.
4. Вычислите $\int_0^1 \sqrt{x} \cos x dx$ с точностью до 0,001. 5. Вычислите $\arctg(1/2)$ с точностью до 0,001.
6. Вычислите $\sqrt[3]{7}$ с точностью до 0,001. 7. Разложите в ряд по степеням x функцию $f(x) = xe^{-2x}$.
8. Вычислите $\int_2^3 \arctg(1/x) dx$ с точностью до 0,001. 9. Вычислите $\cos 36^\circ$ с точностью до 0,001.
10. Вычислите $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{e^x - 1 - x}$, разложив числитель и знаменатель в ряд.
11. Вычислите $\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3} dx$ с точностью до 0,001. 12. Вычислите $\sqrt[4]{17}$ с точностью до 0,001.
13. Вычислите $\int_0^{0,5} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ с точностью до 0,001. 14. Вычислите $\sin 72^\circ$ с точностью до 0,001.
15. Вычислите $\int_0^1 \sqrt{e^{3x^2}} dx$ с точностью до 0,001. 16. Вычислите $e^{1/3}$ с точностью до 0,001.
17. Разложите в ряд по степеням $x-1$ функцию $f(x) = \frac{1}{x}$.
18. Вычислите $\cos 12^\circ$ с точностью до 0,001. 19. Вычислите $e^{1/5}$ с точностью до 0,001.
20. Разложите в ряд по степеням $x - \frac{\pi}{4}$ функцию $f(x) = \cos x$.
21. Вычислите $\int_0^{1/4} e^{-x^2} dx$ с точностью до 0,001.
22. Разложите в ряд по степеням x функцию $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.
23. Разложите в ряд по степеням x функцию $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
24. Вычислите $\sin 12^\circ$ с точностью до 0,001. 25. Вычислите $\cos 24^\circ$ с точностью до 0,001.
26. Вычислите $\ln 1,3$ с точностью до 0,001. 27. Вычислите $\sqrt[3]{80}$ с точностью до 0,001.
28. Разложите в ряд по степеням $x+4$ функцию $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 2$.
29. Разложите в ряд по степеням x функцию $f(x) = \sqrt[3]{8+x}$. 30. Вычислите $\ln 1,9$ с точностью до 0,001.
31. Вычислите $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ с точностью до 0,001. 32. Вычислите $\sin 10^\circ$ с точностью до 0,001.
33. Вычислите $\sqrt[6]{65}$ с точностью до 0,001.