Прямая на плоскости

Общее уравнение прямой.

Прежде чем вводить общее уравнение прямой на плоскости введем общее определение линии.

Определение. Уравнение вида

$F(x,y)=0$ (1)

называется уравнением линии L в заданной системе координат, если этому удовлетворяют координаты x и y любой точки, лежащей на линии L, и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой линии.

Степень уравнения (1) определяет *порядок линии*. Будем говорить, что уравнение (1) определяет (задает) линию L.

Определение. Уравнение вида

$Ax+By+C=0$ (2)

при произвольных коэффициентах A, B, C (A и B одновременно не равны нулю) определяют некоторую прямую в прямоугольной системе координат. Данное уравнение называется *общим уравнением прямой.*

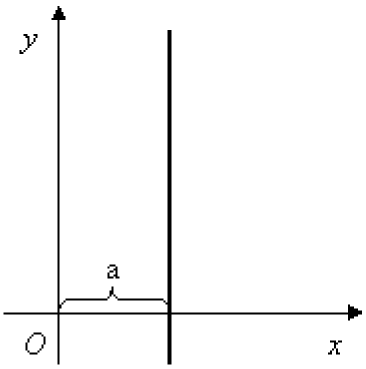
Уравнение (2) есть уравнение первой степени, таким образом, каждая прямая есть линия первого порядка и, обратно, каждая линия первого порядка есть прямая.

Рассмотрим три частных случая, когда уравнение (2) является неполным, т.е. какой-то из коэффициентов равен нулю.

1) Если $C=0$, то уравнение имеет вид $Ax+By=0$ и определяет прямую, проходящую через начало координат т.к. координаты $(0,0)$ удовлетворяют данному уравнению.

2) Если $B=0$ ($A\neq 0$), то уравнение имеет вид $Ax+C=0$ и определяет прямую, параллельную оси ординат. Разрешив это уравнение относительно переменной x получим уравнение вида $x=a$, где $a=-C/A$, a— величина отрезка, который отсекает прямая на оси абсцисс. Если $a=0$ ($C=0$), то прямая совпадает с осью Oy (рис.1а). Таким образом, прямая $x=0$ определяет ось ординат.

3) Если $A=0$ ($B\neq 0$), то уравнение имеет вид $By+C=0$ и определяет прямую, параллельную оси абсцисс. Разрешив это уравнение относительно переменной y получим уравнение вида $y=b$, где $b=-C/B$, b— величина отрезка, который отсекает прямая на оси ординат. Если $b=0$ ($C=0$), то прямая совпадает с осью Ox (рис.1б). Таким образом, прямая $y=0$ определяет ось абсцисс.



а) б)

Рис.1

Уравнение прямой в отрезках.

Пусть дано уравнение *Ax+By+C=0* при условии, что ни один из коэффициентов не равен нулю. Перенесем коэффициент *C* в правую часть и разделим на -*C* обе части.

$$Ax + By = -C$$

$$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1$$

$$\frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1$$

Используя обозначения, введенные в первом пункте, получим уравнение прямой «*в отрезках*»:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (3)$$

Оно имеет такое название потому, что числа *a* и *b* являются величинами отрезков, которые прямая отсекает на осях координат.

Пример. Прямая задана общим уравнением *2x-3y+6=0*. Составить для этой прямой уравнение «в отрезках» и построить эту прямую.

Решение. Выполним преобразования, аналогичные описанным выше, получим:

$$2x - 3y = -6 \quad /:(-6)$$

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1$$

Чтобы построить эту прямую, отложим на оси *Ox* отрезок *a=-3*, а на оси *Oy* отрезок *b=2*. Через полученные точки проведем прямую (рис.2).

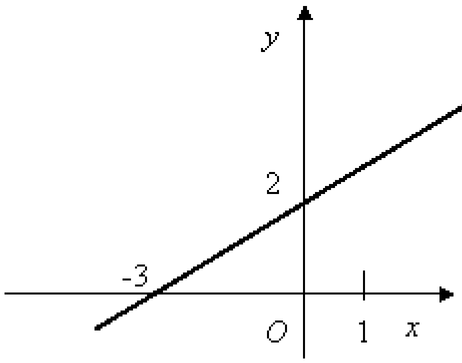


Рис.2

Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Пусть дано уравнение *Ax+By+C=0* при условии, что коэффициент *B* не равен нулю. Выполним следующие преобразования

$By = -Ax - C \quad /:B$

$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$,

$y = kx + b$ (4)

Уравнение (4), где *k=-A/B*, называется уравнением прямой с угловым коэффициентом *k*.

Определение. *Углом наклона* данной *прямой* к оси *Ox* назовем угол *α*, на который нужно повернуть ось *Ox*, чтобы её положительное направление совпало с одним из направлений прямой.

Тангенс угла наклона прямой к оси *Ox* равен угловому коэффициенту, т.е *k=tgα*. Докажем, что *–A/B* действительно равно *k*. Из прямоугольного треугольника *ΔOAB* (рис.3) выразим *tgα,* выполним необходимые преобразования и получим:

$k = tg\alpha = \frac{OB}{OA} = -\frac{b}{a} = -\left(-\frac{C}{B}\right) : \left(-\frac{C}{A}\right) = -\frac{C}{B} \cdot \frac{A}{C} = -\frac{A}{B}$, что и требовалось доказать.

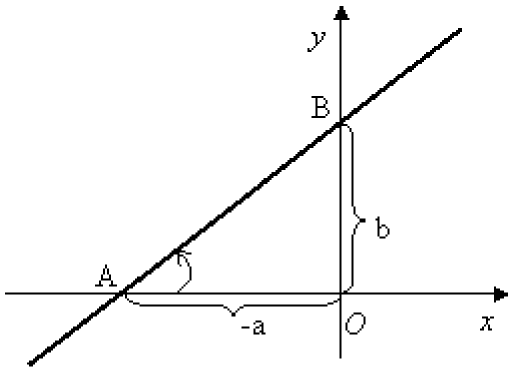


Рис.3

Если $k=0$, то прямая параллельна оси Ox, и её уравнение имеет вид $y=b$.

Пример. Прямая задана общим уравнением $4x+2y-2=0$. Составить для этой прямой уравнение с угловым коэффициентом.

Решение. Выполним преобразования, аналогичные описанным выше, получим:

$$2y = -4x + 2 \quad /:2$$
$$y = -2x + 1$$

где $k=-2$, $b=1$.

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку, с данным угловым коэффициентом.

Пусть задана точка $M_0(x_0,y_0)$ прямой и её угловой коэффициент k. Запишем уравнение прямой в виде (4), где b—пока неизвестное число. Так как точка M_0 принадлежит заданной прямой, то её координаты удовлетворяют уравнению (4): $y_0 = kx_0 + b$, откуда $b = y_0 - kx_0$. Подставляя выражение для b в (4), получаем искомое уравнение прямой:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad (5)$$

Пример. Записать уравнение прямой, проходящей через точку M(1,2) и под наклоном к оси Ox под углом 45^0.

Решение. $k=tg\alpha=tg45^0=1$. Отсюда: $y - 2 = 1(x - 1);\ y = x - 1 + 2;\ y = x + 1$.

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

Пусть даны две точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$. Запишем уравнение прямой в виде (5), где k пока неизвестный коэффициент:

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

Так как точка M_2 принадлежит заданной прямой, то её координаты удовлетворяют уравнению (5): $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$. Выражая отсюда $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ и подставив его в уравнение (5) получим искомое уравнение:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Если $x_1 \neq x_2,\ y_1 \neq y_2$ это уравнение можно переписать в виде, более удобном для запоминания:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (6)$$

Пример. Записать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(1,2)$ и $M_2(-2,3)$

Решение. $\frac{x-1}{-2-1} = \frac{y-2}{3-2};\ \frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{1}$. Используя свойство пропорции, и выполнив необходимые преобразования, получим общее уравнение прямой:

$$1(x-1) = -3(y-2);\ x + 3y - 7 = 0$$

Угол между двумя прямыми

Рассмотрим две прямые l_1 и l_2:

l_1 : $y = k_1x + b_1$, $k_1 = tg\alpha_1$, и

l_2 : $y = k_2x + b_2$, $k_2 = tg\alpha_2$,

φ- угол между ними ($0 \le \varphi \le \pi$). Из рис.4 видно: $\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi,\ \varphi = \alpha_2 - \alpha_1$.

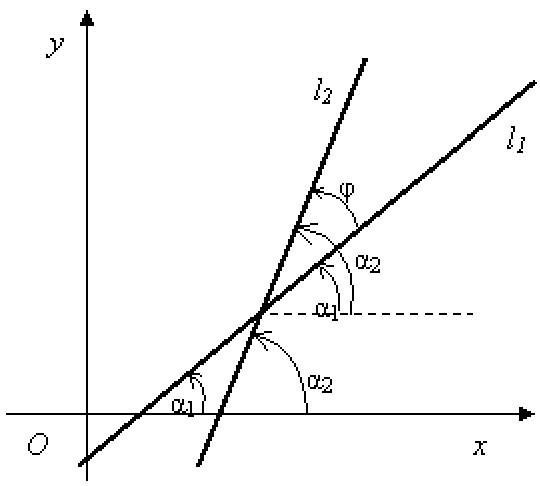


Рис.4

Отсюда $tg\varphi = tg\left(\alpha_2 - \alpha_1\right) = \dfrac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2}$, или

$tg\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$ (7)

С помощью формулы (7) можно определить один из углов между прямыми. Второй угол равен $\pi - \varphi$.

Пример. Две прямые заданы уравнениями y=2x+3 и y=-3x+2. найти угол между этими прямыми.

Решение. Из уравнений видно, что $k_1=2$, а $k_2=-3$. подставляя данные значения в формулу (7), находим

$tg\varphi = \dfrac{-3-2}{1-3\cdot 2} = \dfrac{-5}{-5} = 1$. Таким образом, угол между данными прямыми равен $\pi/4$.

Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

Если прямые l_1 и l_2 параллельны, то $\varphi=0$ и $tg\varphi=0$. из формулы (7) следует, что $k_2 - k_1 = 0$, откуда $k_2=k_1$. Таким образом, условием параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов.

Если прямые l_1 и l_2 перпендикулярны, то $\varphi=\pi/2$, $\alpha_2= \pi/2+ \alpha_1$. $tg\alpha_2 = tg\left(\alpha_1 + \dfrac{\pi}{2}\right) = -ctg\alpha_1 = -\dfrac{1}{tg\alpha_1} = -\dfrac{1}{k}$. Таким образом, условие перпендикулярности двух прямых состоит в том, что их угловые коэффициенты обратны по величине и противоположны по знаку.