Занятие 2. Действия над матрицами. Обратная матрица.

Матрицей A порядка $m \times n$ называется прямоугольная таблица, составленная из действительных чисел и содержащая m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ .. & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right).$$

Сумма (разность) матриц *одного порядка* $C = A \pm B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}, \; i = \overline{1,m};$ $j = \overline{1,n}$.

Произведение матрицы на число $B = \lambda A \Leftrightarrow b_{ij} = \lambda a_{ij} \quad (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$.

Произведением AB матриц A порядка $m \times k$ и B порядка $k \times n$ называется матрица $C = AB$ порядка $m \times n$, элементы c_{ij} которой равны сумме произведений соответствующих элементов i-ой строки матрицы A и j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{k} a_{ir} b_{rj} \quad (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}):$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Некоммутативность (неперестановочность) умножения матриц: $AB \neq BA$.

Если A - невырожденная *квадратная* матрица (определитель матрицы $|A| \neq 0$), то существует единственная матрица A^{-1}, называемая **обратной** к матрице A, такая, что $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где E - единичная матрица. Чтобы **найти** A^{-1} необходимо: - вычислить определитель $\Delta = |A|$ матрицы A; - найти алгебраические дополнения A_{ij} каждого элемента a_{ij} матрицы A; - составить из чисел A_{ij} матрицу A^*; - транспонируя матрицу A^*, составить матрицу $\left(A^*\right)^T$; - умножить матрицу $\left(A^*\right)^T$ на число $\frac{1}{\Delta}$: $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\left(A^*\right)^T$; - сделать проверку по определению $A^{-1} \cdot A = E$.

Задачи.

1. Найти линейные комбинации заданных матриц.

$$1). \; C = 4A - 5B, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

2). $C = 4B + 3A, \quad A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 7 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$

2. Найти произведение матриц AB и BA (если это возможно).

1). $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$ 2). $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

3. Найти произведение матриц $A(BC)$ и $(AB)C$.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

4. Найти произведение $A \cdot A^T$ и $A^T \cdot A$.

1). $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$ 2). $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$

5. Найти обратную матрицу A^{-1} и сделать проверку.

1). $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$ 2). $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$ 3). $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$ 4). $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$

Дополнительные задачи.

1. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

2. Найти матрицу $C = \left(A^{-1}\right)^2 + \left(A^T \cdot A\right)^{-1}$, если $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$

3. Найти значение матричного многочлена $f(A)$:

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1. Гл. IV, пар. 2.

1. Найти линейную комбинацию заданных матриц.

1). $C = 4B - 3A, \; A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ -7 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$

2. Найти произведение матриц AB и BA (если это возможно).

1). $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$. 2). $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Найти произведение матриц $A(BC)$ и $(AB)C$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Найти обратную матрицу A^{-1} и сделать проверку.

1). $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. 2). $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. 3). $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -7 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 4). $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.