Занятие 4. Системы линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса.

Метод Гаусса заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы. Для краткости вместо системы рассматриваем **расширенную матрицу** ее коэффициентов, которую приводим к треугольному виду:

$$\overline{A} = \left\langle \begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right\rangle \Rightarrow \left\langle \begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & b''_3 \end{array} \right\rangle \Uparrow$$

с помощью следующих, *не меняющих решения*, преобразований:

1. В $\overline{A}$ можно менять местами строки.

2. Можно в $\overline{A}$ менять местами столбцы *слева от прямой черты.*

3. К одной строке $\overline{A}$ можно прибавить другую, умноженную на некоторое число.

Треугольную матрицу записываем в виде уравнений снизу вверх, последовательно находя неизвестные.

Задачи.

1. Решить каждую систему методом Гаусса.

1). $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -1, \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$ 2). $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$ 3). $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 9, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 16, \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$

4). $\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 = -1, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 1, \\ 5x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$ 5). $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \\ -x_1 - x_2 + 4x_4 = -7, \\ 3x_1 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$

Дополнительные задачи.

1. Решить систему методом Гаусса. 2. Вычислить определитель.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -2, \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = -1. \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 & 1 \\ 7 & -1 & 4 & 2 \\ 9 & -8 & -6 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -4 \end{vmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Найти матрицу, обратную данной матрице $A = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 5 \\ -4 & 6 & 2 \\ 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч.1. Гл.IV, пар.6.

1. Решить каждую систему методом Гаусса.

1). $\begin{cases} 2x+4y+z=4, \\ 3x+6y+2z=4, \\ 4x-y-3z=1. \end{cases}$ 2). $\begin{cases} 2x+y-z=5, \\ x-2y+2z=-5, \\ 7x+y+z=10. \end{cases}$ 3). $\begin{cases} 7x_1-2x_2+3x_3-x_4=4, \\ -x_1+x_2-x_3+2x_4=-2, \\ 3x_2-x_3+3x_4=-6, \\ -2x_1-3x_2+x_3-2x_4=6. \end{cases}$

4). $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-x_4=-3, \\ 2x_2-3x_4=1, \\ -x_1+2x_3-2x_4=-2, \\ 3x_1-2x_2+x_3=-4. \end{cases}$ 5). $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-x_4=-2, \\ x_2-2x_3+2x_4=-2, \\ -2x_1-2x_3+x_4=1, \\ 3x_1+2x_2-3x_3=-5. \end{cases}$