Занятие 6. Нелинейные операции над векторами.

1. **Скалярное произведение векторов** – *число* $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$;

1). проекция вектора на вектор $пр_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$; 2). если $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1); \vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$. **Свойства:** 1). $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$; 2). $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$; 3). скалярный квадрат $\vec{a}^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$, тогда $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}\cdot\vec{a})}$; 4). $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$; 5). $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0$; $\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$. **Условие перпендикулярности векторов:** $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$. **Угол между векторами:**

$$cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

2. **Векторное произведение -** *вектор* $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$, определяемый условиями: 1). $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi$; 2). $\vec{c}$ перпендикулярен и $\vec{a}$, и $\vec{b}$; 3). вектор $\vec{c}$ направлен так, что с его конца переход от первого сомножителя $\vec{a}$ ко второму $\vec{b}$ виден как переход против часовой стрелки. **В координатах,** если $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k} =$

$= \left\{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right\}$. $|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}$. **Свойства векторного произведения:** 1). $\vec{a}\times\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}\parallel\vec{b}$; 2). $\vec{a}\times\vec{a} = 0$; 3). $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$; 4). $\vec{i}\times\vec{i} = 0$, $\vec{j}\times\vec{j} = 0$, $\vec{k}\times\vec{k} = 0$; $\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$; $\vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k}$, $\vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i}$, $\vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}$. **Геометрически модуль** векторного произведения – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $S_{пар} = |\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi$.

Задачи.

1. Упростить выражение $(2\vec{i} - \vec{j})\vec{j} + (\vec{j} - 2\vec{k})\vec{k} + (\vec{i} - 2\vec{k})^2$.
2. Упростить: $\vec{i}\times(\vec{j}+\vec{k}) - \vec{j}\times(\vec{i}+\vec{k}) + \vec{k}\times(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$.
3. Найти угол между векторами $\vec{a} = (1;2;3)$ и $\vec{b} = (6;4;-2)$.
4. При каком значении m векторы $\vec{a} = m\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - m\vec{k}$ взаимно перпендикулярны?
5. Найти площадь и высоту параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{k}$.
6. Даны векторы $\vec{a} = (3;-1;-2), \vec{b} = (1;2;-1)$. Найти $(2\vec{a} - \vec{b})\times(2\vec{a} + \vec{b})$.
7. Найти вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = (2;-3;1)$ и $\vec{b} = (1;-2;3)$, и удовлетворяющий условию $\vec{x}\cdot(\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}) = 10$.

8. Вычислить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{c} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, если $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{q}| = 3$, $\alpha = \pi / 4$.
9. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} - 2\vec{b}$ и $3\vec{a} + 2\vec{b}$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 5$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 45^0.

Дополнительные задачи.

1. Дано $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \vec{a} \perp \vec{b}$. Найти $(5\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b})$.

2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = 120^0$ и $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5$. Найти $|\vec{a} + \vec{b}|$ и $|\vec{a} - \vec{b}|$.

3. Даны точки $A(3;3;-2), B(0;-3;4), C(0;-3;0), D(0;2;-4)$. Найти $пр_{\vec{AB}} \vec{CD}$.

4. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = (2;1;-1)$ и удовлетворяющий условию $\vec{x} \cdot \vec{a} = 3$.

5. Доказать: $(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b}) = 3\vec{a} \times \vec{b}$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч.1. Гл.II, пар.3.

1. Упростить: $2\vec{i} \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) + 3\vec{j} \cdot (\vec{i} \times \vec{k}) + 4\vec{k} \cdot (\vec{i} \times \vec{j})$.

2. Даны векторы $\vec{a} = (4;-2;-4)$ и $\vec{b} = (6;-3;2)$. Найти а) $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$; б) $(\vec{a} + \vec{b})^2$.

3. Даны векторы $\vec{a} = (3;-1;-2)$ и $\vec{b} = (1;2;-1)$. Найти координаты $(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}$.

4. Вычислить длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{c} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, если $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{q}| = 3$, угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\pi / 4$.

5. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \pi / 6$. Зная, что $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, вычислить угол между векторами $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$.

6. Даны вершины треугольника $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$, $C(1;3;-1)$. Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.