

Занятие 17. Применение эквивалентных бесконечно малых. Второй замечательный предел.

Сравнение бесконечно малых в точке $\alpha = 0$. Эквивалентные бесконечно малые: $\sin \alpha \sim \alpha$; $\sin^2 \alpha \sim \alpha^2$; $\operatorname{tg} \alpha \sim \alpha$; $1 - \cos \alpha \sim \frac{\alpha^2}{2}$; $\arcsin \alpha \sim \alpha$; $\ln(1 + \alpha) \sim \alpha$;
 $e^\alpha - 1 \sim \alpha$; $a^\alpha - 1 \sim \alpha \ln a$; $(1 + \alpha)^n - 1 \sim n\alpha$; $\sqrt{1 + \alpha} - 1 \sim \frac{\alpha}{2}$.

Второй замечательный предел (неопределенность 1^∞). $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$;

$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$. Если $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = \infty$, то $\lim_{x \rightarrow a} (u(x))^{v(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} (u(x)-1)v(x)}$.

Задачи.

Найти пределы.

1. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin(x+2)}{x^2 + 2x}$. 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sin 5x}$. 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} - 1}{\arcsin x}$. 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x-x^2} - 1}{x}$.

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[2]{1+3x}$. 6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{2^{\sin 3x} - 1}$. 7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-5}{x+4}\right)^x$. 8. $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(x+3) - \ln x)$.

9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2}{x^2-2}\right)^{x^2}$. 10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}$. 11. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3+5x}{3+2x}\right)^{\frac{1}{x}}$. 12. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

Дополнительные задачи.

Найти пределы.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\operatorname{tg} x} - 3^{\sin x}}{\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)^3}$. 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\sqrt[4]{1+x^2} - 1}$. 3. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{3x} + x)^{1/x}$. 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x+2)(\ln(x-2) - \ln(x+2))$.

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 4x}{x}\right)^{x-1}$. 6. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$. 7. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$. 8. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{(1 - \sin x)^2}}$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч.1. Гл. VI, пар. 4, 5.

Найти пределы.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 5x}$. 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+mx} - 1}{x}$. 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x+1} - 1}$. 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\arcsin x}$. 5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5-x}{6-x}\right)^{x+2}$.

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(2x+1) - \ln(x+2)). \quad 7. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{10+5x}{10+2x} \right)^{\frac{1}{2x}}. \quad 8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+3x}{3x+2} \right)^{4x}. \quad 9. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+5}{3x^2+3} \right)^{3+3x^2}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{8+x}{10+x} \right)^{2x+1}.$$