

## Занятие 19. Производная. Дифференциал.

**Производная** от функции  $y = f(x)$  в точке  $x$ :  $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

**Дифференциал функции**  $y = f(x)$ :  $dy = y'dx$ . **Правила**

**дифференцирования:** 1.  $(u \pm v)' = u' \pm v'$ . 2.  $(u \cdot v)' = u'v + uv'$ . 3.  $(c \cdot u)' = c \cdot u'$ .

4.  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ . **Производные основных элементарных функций:**

1.  $c' = 0$ . 2.  $(x^n)' = nx^{n-1}$ ;  $x' = 1$ ;  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ;  $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ .

3.  $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ ;  $(e^x)' = e^x$ . 4.  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ ;  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ . 5.  $(\sin x)' = \cos x$ .

6.  $(\cos x)' = -\sin x$ . 7.  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ . 8.  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ . 9.  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

10.  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ . 11.  $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ . 12.  $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ .

### Задачи.

1. Найти производные функций, используя определение производной.

1).  $y = x^2 - x$ ; 2).  $y = \sqrt{x+4}$ .

2. Найти производные функций, используя таблицу производных.

1).  $y = 3x - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}$ . 2).  $y = x^2 + \frac{1}{3x^2} - \frac{2}{5x^3}$ . 3).  $y = 4\sqrt{x} + 8\sqrt[4]{x} - 5\sqrt[5]{x^2}$ .

4).  $y = \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{x}{\sqrt[4]{x}}$ . 5).  $y = x^3 - 2\sin x + 3\operatorname{ctg} x$ . 6).  $y = x^5 + \cos x + \operatorname{tg} x$ .

7).  $y = x^2 + 2^x + e^x$ . 8).  $y = \ln x + \log_2 x + \log_3 x$ . 9).  $y = \arcsin x - \lg x + \operatorname{arcctg} x$ .

10).  $y = x^2 \cos x$ . 11).  $y = \sqrt{x} \operatorname{ctg} x$ . 12).  $y = e^x \operatorname{arctg} x$ . 13).  $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ . 14).  $y = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}}$ .

15).  $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ . 16).  $y = \frac{3^x}{\sin x + 1}$ . 17).  $y = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$ ; найти  $y'(0)$  и  $y'(1)$ .

3. Найти дифференциалы функций.

1).  $y = (x^2 + 4x + 1)(x^2 - \sqrt{x})$ . 2).  $y = \frac{x^3 + 1}{x^3 - 1}$ . 3).  $y = \frac{1}{1-t^2}$ . 4).  $r = \frac{\cos \varphi}{1 - \varphi^2}$ . 5).  $y = \frac{m-n}{x^{0.2}}$ .

### Дополнительные задачи.

1. При каком значении независимой переменной  $x$  касательные к кривым  $y = x^2$  и  $y = x^3$  параллельны?

2.  $f(z) = \frac{2z^3 - 3z + \sqrt{z-1}}{z}$ . Найти  $f'\left(\frac{1}{4}\right)$ .

3. Убедиться, что функция  $y = \frac{1 + \ln x}{x - x \ln x}$  удовлетворяет соотношению  $2x^2 dy = (x^2 y^2 + 1) dx$ .

**Задачи для самостоятельной работы.** Данко, ч.1. Гл.VII, пар.1, п.1.

1. Найти производную функции  $y = x^3 + 3x$ , используя определение производной.

2. Найти производные функций, используя таблицу производных.

1).  $y = 2x - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^3}$ . 2).  $y = 6x^2 + \frac{1}{3x} - \frac{2}{x^3}$ . 3).  $y = 3\sqrt{x} + 8\sqrt[4]{x^3} - 5\sqrt[3]{x^2}$ .

4).  $y = \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{x}{\sqrt[4]{x^3}}$ . 5).  $y = x^4 - \cos x + 7 \operatorname{tg} x$ . 6).  $y = 2x^6 + \sin x + 4 \operatorname{ctg} x$ .

7).  $y = x^2 + 2^x + e^x$ . 8).  $y = \ln x + \log_4 x + \log_5 x$ . 9).  $y = \arccos x - 5 \lg x + \operatorname{arctg} x$ .

10).  $y = x^2 \sin x$ . 11).  $y = \sqrt{x} \operatorname{tg} x$ . 12).  $y = 2^x \operatorname{arccot} x$ . 13).  $y = \frac{x^4}{x^2 + 1}$ .

14).  $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$ . 15).  $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{x}}$ . 16).  $y = \frac{e^x}{\cos x + 1}$ .

3. Найти дифференциалы функций.

1).  $y = (x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 - \sqrt{x})$ . 2).  $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ . 3).  $r = \frac{\sin \varphi}{1 - \varphi^2}$ . 4).  $y = \frac{m + n}{\sqrt{x}}$ .