

## Занятие 22. Логарифмическая производная. Производные высших порядков.

Логарифмическая производная:  $(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ . Вторая производная:

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Производная  $n$ -го порядка:  $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$ .

Производная показательной-степенной функции:  $(u^v)' = vu^{v-1}u' + u^v \ln uv'$ .

### Задачи.

1. Найти производную от показательной-степенной функции.

1).  $y = x^x$ . 2).  $y = (\ln x)^{1/x}$ . 3).  $y = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^{x^2}$ . 4).  $y = (\sqrt{x+2})^{\sin 2x}$ . 5).  $y = (\arctg x^2)^{\sqrt{x^2+1}}$ .

6).  $y = (\operatorname{tg} x e^x)^{\sqrt{x}}$ .

2. Найти производные функций с помощью логарифмирования.

1).  $y = \frac{(x-1)^4(x+1)^5}{(x^2+2)^7(x-5)^4}$ . 2).  $y = x^3 e^{x^2} \sin 2x$ . 3).  $y = (x^2+1)^3(x+2)^{10}(2x-5)^8(6x-7)^{11}$ .

4).  $y = \frac{(x+1)^3 \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$ . 5).  $y = \frac{x^2 e^x \operatorname{arcc} \operatorname{tg} x}{\ln^3 x}$ .

3. Найти производные второго порядка.

1).  $y = \cos^2 2x$ . 2).  $y = x\sqrt{1+x^2}$ . 3).  $y = (1+x^2) \operatorname{arctg} x$ . 4).  $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ .

5).  $y = x \ln(\sin x)$ .

4. Найти производные высших порядков.

1).  $y = \sin^2 x$ ;  $y''' = ?$  2).  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ;  $f^v = ?$  3).  $y = x^3 \ln x$ ;  $y^{(4)} = ?$  4).  $r = a \sin 2\varphi$ ;

$\frac{d^4 r}{d\varphi^4} = ?$  5).  $y = \ln x$ ;  $y^{(n)} = ?$

5. Вычислить дифференциалы второго порядка по формуле  $d^2 y = y'' dx^2$ .

1).  $y = \cos^4 2x$ . 2).  $y = x \ln x$ . 3).  $y = e^{x^2}$ .

### Дополнительные задачи.

1. Найти производные функций с помощью логарифмирования.

1).  $y = x^{x^x}$ . 2).  $x^y = y^x$ . 3).  $y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$ .

2. Найти производную  $n$ -го порядка от функции  $y = \frac{1-x}{1+x}$ .

3. Убедиться, что функция  $y = \frac{x-3}{x+4}$  удовлетворяет соотношению  $2y'^2 = (y-1)y''$ .

**Задачи для самостоятельной работы.** Данко, ч.1. Гл.VII, пар.1, п.1,6,8.

1. Найти производные функций с помощью логарифмирования.

1).  $y = x^{x^a}$ . 2).  $y = (\sin 3x)^{\sqrt{x}}$ . 3).  $y = x^{a^x}$ . 4).  $y = (a^x)^x$ . 5).  $y = (\sqrt[4]{x})^{\cos 4x}$ . 6).  $y = \left(\frac{1}{x}\right)^{e^{x^2}}$ .

7).  $y = \sqrt{x \sin x \sqrt{1-e^x}}$ . 8).  $y = \frac{(x-1)^4 (x+1)^5}{(x^2+2)^7 (x-5)^4}$ . 9).  $y = x^4 2^{x^2} \cos 2x$ .

10).  $y = \frac{(x+2)^5 \sqrt[3]{x+3}}{\sqrt[4]{(x-2)^3}}$ . 11).  $y = \frac{x e^x \operatorname{arctg} x}{\ln^5 x}$ .

2. Найти производные второго порядка.

1).  $y = \sin^2 3x$ . 2).  $y = x e^{\sqrt{x}}$ . 3).  $y = 2^x x^3$ . 4).  $y = \sqrt{1-x^2} \arccos x$ . 5).  $y = x^2 \ln(\cos x)$ .

3. Найти производные высших порядков.

1).  $y = \cos^2 x$ ;  $y''' = ?$  2).  $f(x) = \frac{1}{1+x}$ ;  $f^{(4)} = ?$  3).  $y = x^4 \lg x$ ;  $y^{(3)} = ?$  4).  $r = a \cos 2\varphi$ ;

$$\frac{d^5 r}{d\varphi^5} = ?$$

4. Вычислить дифференциалы второго порядка по формуле  $d^2 y = y'' dx^2$ .

1).  $y = \operatorname{arctg} 2x$ . 2).  $y = x \sin x$ . 3).  $y = 2^{\sin 2x}$ .