

Занятие 23. Производная неявной и параметрически заданной функций.

Если функция $y = f(x)$ задается соотношением $F(x, y) = 0$, то говорят, что она задана неявно. При нахождении производной необходимо помнить, что y является функцией аргумента x . **Пример.** $(x^2 y)' = 2xy + x^2 y'$.

Параметрически заданная функция $y = f(x)$: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Ее

производная: $y'_x = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}$. **Вторая производная** параметрически заданной

функции: $y''_{xx} = (y'_x)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y''_{tt} x'_t - y'_t x''_{tt}}{x'^3_t}$.

Задачи.

1. Найти производные от функций, заданных неявно.

1). $2y^3 = 2x^2 + \operatorname{arctg}(xy)$. 2). $2^x + 2^y = 2^{x+y}$. 3). $\ln(x^2 y) = \operatorname{ctg}(y + xy)$.

4). $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. 5). $\operatorname{arccctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$. 6). $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{4}}$.

2. Найти производные второго порядка.

1). $y^2 = \cos(x + y)$. 2). $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{3}$. 3). $y + x = \ln(xy)$. 4). $x^3 - y^3 = x^2 y^2$.

3. Найти производные от функций, заданных параметрически.

1). $x = 2 \cos t - \cos 2t$, $y = 2 \sin t - \sin 2t$. 2). $x = \frac{1}{3} \sin^3 t$, $y = \frac{1}{3} \cos^3 t$. 3). $x = 2 \ln \operatorname{ctgt} + 1$,

$y = \operatorname{tgt} + \operatorname{ctgt}$. 4). $x = \frac{3at}{1+t^2}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^2}$. 5). $x = \sqrt[3]{t^2}$, $y = \sqrt[4]{t^3}$. 6). $x = e^{2t} \cos^2 t$, $y = e^{2t} \sin^2 t$.

4. Найти производные второго порядка.

1). $x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $y = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$. 2). $x = 2^{-2t}$, $y = 2^{2t}$. 3). $x = e^{2t} \cos t$, $y = e^{2t} \sin t$.

4). $x = t(1 - \sin t)$, $y = t^2 \cos t$.

Дополнительные задачи.

1. Из уравнений, параметрически задающих функцию, исключить параметр.

1). $x = 3t$, $y = 6t - t^2$. 2). $x = \cos t$, $y = \sin 2t$.

2. Найти угловой коэффициент касательной к линии $x = 3 \cos t$, $y = 4 \sin t$ в

точке $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2}\right)$.

3. Убедиться, что параметрически заданная функция $x = 3t^2, y = 3t - t^3$ удовлетворяет соотношению $36y''(1 - \sqrt{3x}) = x + 3$.

4. $e^y + xy = e$. Найти $y''(x)$ при $x = 0$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч.1. Гл.VII, пар.1, п.2,3.

1. Найти производные от функций, заданных неявно.

1). $\sqrt[3]{xy} = e^{x+y^2}$. 2). $y^2 \sin x = a^2 \cos^3(x^2 y)$. 3). $\operatorname{tg} \sqrt{xy} = x^3 e^y$. 4). $x^2 + y^2 - 2axy = 0$.

5). $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$. 6). $x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$.

2. Найти производные от функций, заданных параметрически.

1). $x = \ln(1 + t^2), y = \operatorname{arccctgt}$. 2). $x = \ln \cos t, y = t^2 \sin t$. 3). $x = \sin t + \cos t, y = a^t + a^{-t}$.

4). $x = \left(\frac{2}{3} \sqrt{t+1}\right)t, y = \sqrt{t} \cdot e^{\sqrt{t}}$. 5). $x = e^{-t} \sin^2 t, y = e^t \cos^2 t$. 6). $x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3}$.

3. Найти производные второго порядка.

1). $y^2 = \cos(x + y)$. 2). $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{3}$. 3). $y + x = \ln(xy)$. 4). $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$.

5). $x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{t}}, y = \sqrt{1 - \sqrt{t}}$. 6). $x = a \cos t, y = a \sin t$. 7). $x = a(\varphi - \cos \varphi), y = a(1 - \sin \varphi)$.

8). $x = \ln t, y = t^2 - 1$.