Плоскость в пространстве.

Всякое уравнение первой степени относительно координат x, y, z

$Ax + By + Cz + D = 0$ (3.1)

задает плоскость, и наоборот: всякая плоскость может быть представлена уравнением (3.1), которое называется уравнением плоскости.

Вектор n (A, B, C), ортогональный плоскости, называется нормальным вектором плоскости. В уравнении (3.1) коэффициенты A, B, C одновременно не равны 0.

Особые случаи уравнения (3.1):

1. $D = 0$, $Ax+By+Cz = 0$ - плоскость проходит через начало координат.

2. $C = 0$, $Ax+By+D = 0$ - плоскость параллельна оси Oz.

3. $C = D = 0$, $Ax +By = 0$ - плоскость проходит через ось Oz.

4. $B = C = 0$, $Ax + D = 0$ - плоскость параллельна плоскости Oyz.

Уравнения координатных плоскостей: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Прямая в пространстве может быть задана:

1) как линия пересечения двух плоскостей,т.е. системой уравнений:

$A1\, x + B1\, y + C1\, z + D1 = 0$, $A2\, x + B2\, y + C2\, z + D2 = 0$; (3.2)

2) двумя своими точками $M1(x1, y1, z1)$ и $M2(x2, y2, z2)$, тогда прямая, через них проходящая, задается уравнениями:

=; (3.3)

3) точкой $M1(x1, y1, z1)$, ей принадлежащей, и вектором a (m, n, p), ей коллинеарным. Тогда прямая определяется уравнениями:

. (3.4)

Уравнения (3.4) называются каноническими уравнениями прямой.

Вектор a называется направляющим вектором прямой.

Параметрические уравнения прямой получим, приравняв каждое из отношений (3.4) параметру t:

$x = x1 + mt, y = y1 + nt, z = z1 + pt.$ (3.5)

Решая систему (3.2) как систему линейных уравнений относительно неизвестных x и y, приходим к уравнениям прямой в проекциях или к приведенным уравнениям прямой:

$x = mz + a, y = nz + b.$ (3.6)

От уравнений (3.6) можно перейти к каноническим уравнениям, находя z из каждого уравнения и приравнивая полученные значения:

.

От общих уравнений (3.2) можно переходить к каноническим и другим способом, если найти какую-либо точку этой прямой и ее направляющий вектор n = [n1, n2], где n1(A1, B1, C1) и n2(A2, B2, C2) - нормальные векторы заданных плоскостей. Если один из знаменателей m, n или p в уравнениях (3.4) окажется равным нулю, то числитель соответствующей дроби надо положить равным нулю, т.е. система

равносильна системе ; такая прямая перпендикулярна к оси Ox.

Система равносильна системе x = x1, y = y1; прямая параллельна оси Oz.

Пример 1.15. Составьте уравнение плоскости, зная, что точка А(1,-1,3) служит основанием перпендикуляра, проведенного из начала координат к этой плоскости.

Решение. По условию задачи вектор ОА(1,-1,3) является нормальным вектором плоскости, тогда ее уравнение можно записать в виде

x-y+3z+D=0. Подставив координаты точки А(1,-1,3), принадлежащей плоскости, найдем D: 1-(-1)+3×3+D = 0 Þ D = -11. Итак, x-y+3z-11=0.

Пример 1.16. Составьте уравнение плоскости, проходящей через ось Оz и образующей с плоскостью 2x+y-z-7=0 угол 60о.

Решение. Плоскость, проходящая через ось Oz, задается уравнением Ax+By=0, где А и В одновременно не обращаются в нуль. Пусть В не

равно 0, A/Bx+y=0. По формуле косинуса угла между двумя плоскостями

.

Решая квадратное уравнение 3m2 + 8m - 3 = 0, находим его корни

m1 = 1/3, m2 = -3, откуда получаем две плоскости 1/3x+y = 0 и -3x+y = 0.

Пример 1.17. Составьте канонические уравнения прямой:

5x + y + z = 0, 2x + 3y - 2z + 5 = 0.

Решение. Канонические уравнения прямой имеют вид:

где m, n, p - координаты направляющего вектора прямой, x1, y1, z1 - координаты какой-либо точки, принадлежащей прямой. Прямая задана как линия пересечения двух плоскостей. Чтобы найти точку, принадлежащую прямой, фиксируют одну из координат (проще всего положить, например, x=0) и полученную систему решают как систему линейных уравнений с двумя неизвестными. Итак, пусть x=0, тогда y + z = 0, 3y - 2z+ 5 = 0, откуда y=-1, z=1. Координаты точки M(x1, y1, z1), принадлежащей данной прямой, мы нашли: M (0,-1,1). Направляющий вектор прямой легко найти, зная нормальные векторы исходных плоскостей n1(5,1,1) и n2(2,3,-2). Тогда

Канонические уравнения прямой имеют вид: x/(-5) = (y + 1)/12 =

= (z - 1)/13.

Пример 1.18. В пучке, определяемом плоскостями 2х-у+5z-3=0 и х+у+2z+1=0, найти две перпендикулярные плоскости, одна из которых проходит через точку М(1,0,1).

Решение. Уравнение пучка, определяемого данными плоскостями, имеет вид u(2х-у+5z-3) + v(х+у+2z+1)=0, где u и v не обращаются в нуль одновременно. Перепишем уравнение пучка следующим образом:

(2u +v)x + (- u + v)y + (5u +2v)z - 3u + v = 0.

Для того, чтобы из пучка выделить плоскость, проходящую через точку М, подставим координаты точки М в уравнение пучка. Получим:

(2u+v)×1 + (-u + v)×0 + (5u + 2v)×1 -3u + v =0, или v = - u.

Тогда уравнение плоскости, содержащей M, найдем, подставив v = - u в уравнение пучка:

u(2x-y +5z - 3) - u (x + y +2z +1) = 0.

Т.к. $u^{1}0$ (иначе $v=0$, а это противоречит определению пучка), то имеем уравнение плоскости $x-2y+3z-4=0$. Вторая плоскость, принадлежащая пучку, должна быть ей перпендикулярна. Запишем условие ортогональности плоскостей:

$(2u+ v)\times 1 + (v - u)\times(-2) + (5u +2v)\times 3 = 0$, или $v = - 19/5u$.

Значит, уравнение второй плоскости имеет вид:

$u(2x -y+5z - 3) - 19/5\, u(x + y +2z +1) = 0$ или $9x +24y + 13z + 34 = 0$.