Взаимное расположение двух плоскостей.

Плоскости могут совпадать, быть параллельными или пересекаться по прямой.

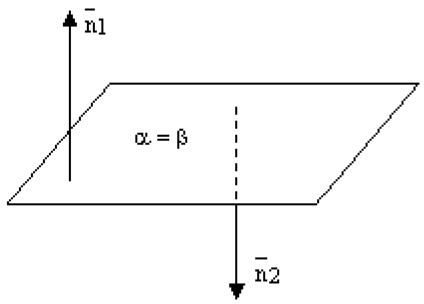

рис.3.

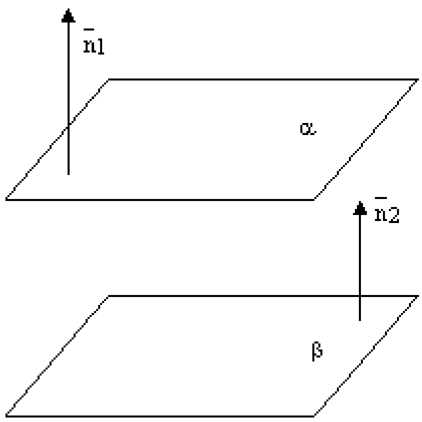

рис.4.

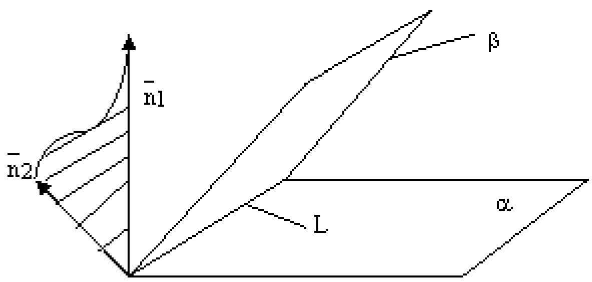

рис.5.

Теорема. Пусть

$\alpha: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $\beta: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

– общие уравнения двух плоскостей. Тогда:

1) если $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$, то плоскости совпадают;

2) если $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$, то плоскости параллельны;

3) если $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$ или $\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$, то плоскости пересекаются и система уравнений

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \qquad (6)$$

является уравнениями прямой пересечения данных плоскостей.

Доказательство. Первое и второе условия теоремы равносильны коллинеарности нормальных векторов данных плоскостей:

$$\bar{n}_1=(A_1,B_1,C_1)\parallel\bar{n}_2=(A_2,B_2,C_2).$$

Если $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}=k$, то $A_1=A_2\cdot k$, $B_1=B_2\cdot k$, $C_1=C_2\cdot k$, $D_1=D_2\cdot k$ и уравнение плоскости α принимает вид:

$$\alpha: k(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

Коэффициент пропорциональности k не может быть равен нулю, т.к. $\bar{n}_1=(A_1,B_1,C_1)=k\cdot\bar{n}_2=(k\cdot A_2,k\cdot B_2,k\cdot C_2)$ и при $k=0$ получаем, что $\bar{n}_1=\bar{0}$, что противоречит определению нормального вектора. Следовательно, уравнение плоскости α

$$\alpha: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

совпадает с уравнением плоскости β, а это означает, что плоскости совпадают.

Если $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$, то это означает коллинеарность нормальных векторов обеих плоскостей, а значит плоскости либо параллельны, либо совпадают. Но в этом случае плоскости не могут совпадать и остается единственная возможность их параллельности.

Третье условие теоремы равносильно тому, что нормальные векторы плоскостей не коллинеарные, а потому они не совпадают и не параллельны, а следовательно, они пересекаются. Из геометрии известно, что линия пересечения двух плоскостей является прямой.

Точка М лежит на прямой пересечения двух плоскостей α и β тогда и только тогда, когда она лежит одновременно на обеих плоскостях и ее координаты удовлетворяют обоим уравнениям системы (6), т.е. являются решением этой системы. А это означает, что система (6) является уравнениями прямой пересечения плоскостей, ч.т.д.

Теорема доказана.

п.4. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

Прямая может лежать на данной плоскости, быть параллельна данной плоскости или пересекать ее в одной точке, см. следующие рисунки.

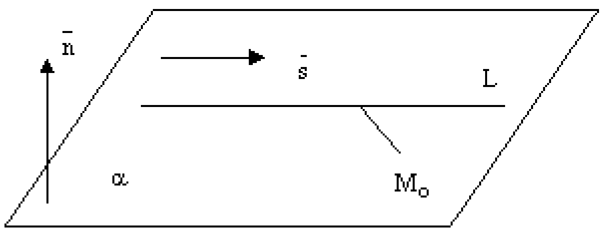

рис.6.

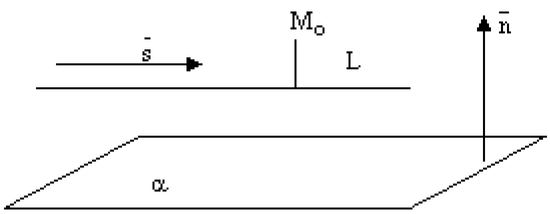

рис.7.

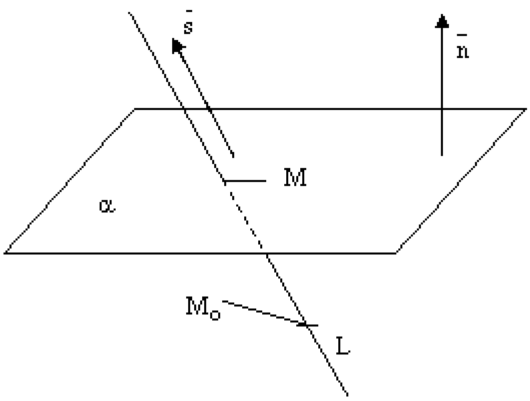

рис.8.

Теорема. Пусть плоскость α задана общим уравнением

$$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0,$$

а прямая L задана каноническими уравнениями

$$L: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

или параметрическими уравнениями

$$L:\begin{cases} x = x_o + mt \\ y = y_o + nt \\ z = z_o + pt \end{cases}, \quad t \in R,$$

в которых $\bar{n} = (A, B, C)$ – координаты нормального вектора плоскости α, $M_o(x_o, y_o, z_o)$ – координаты произвольной фиксированной точки прямой L, $\bar{s} = (m, n, p)$ –

координаты направляющего вектора прямой L. Тогда:

1) если $\bar{n} \cdot \bar{s} = Am + Bn + Cp \neq 0$, то прямая L пересекает плоскость α в точке, координаты которой (x, y, z) можно найти из системы уравнений

$$\begin{cases} A(x_o + mt) + B(y_o + nt) + C(z_o + pt) + D = 0 \\ x = x_o + mt \\ y = y_o + nt \\ z = z_o + pt \end{cases}; \qquad (7)$$

2) если $\bar{n} \cdot \bar{s} = Am + Bn + Cp = 0$ и $Ax_o + By_o + Cz_o + D = 0$, то прямая лежит на плоскости;

3) если $\bar{n} \cdot \bar{s} = Am + Bn + Cp = 0$ и $Ax_o + By_o + Cz_o + D \neq 0$, то прямая параллельна плоскости.

Доказательство. Условие $\bar{n} \cdot \bar{s} \neq 0$ говорит о том, что вектроры $\bar{n}$ и $\bar{s}$ не ортогональны, а значит прямая не параллельна плоскости и не лежит в плоскости, а значит пересекает ее в некоторой точке М. Координаты точки М удовлетворяют как уравнению плоскости, так и уравнениям прямой, т.е. системе (7). Решаем первое уравнение системы (7) относительно неизвестной t и затем, подставляя найденное значение t в остальные уравнения системы, находим координаты искомой точки.

Если $\bar{n} \cdot \bar{s} = 0$, то это означает, что $\bar{n} \perp \bar{s}$. А такое возможно лишь тогда, когда прямая лежит на плоскости или параллельна ей. Если прямая лежит на плоскости, то любая точка прямой является точкой плоскости и координаты любой точки прямой удовлетворяют уравнению плоскости. Поэтому достаточно проверить, лежит ли на плоскости точка $M_o(x_o, y_o, z_o)$. Если $Ax_o + By_o + Cz_o + D = 0$, то точка $M_o(x_o, y_o, z_o) \in \alpha$ – лежит на плоскости, а это означает, что и сама прямая лежит на плоскости.

Если $\bar{n} \cdot \bar{s} = 0$, а $Ax_o + By_o + Cz_o + D \neq 0$, то точка на прямой не лежит на плоскости, а это означает, что прямая параллельна плоскости.

Теорема доказана.