Занятие 7. Нелинейные операции над векторами.

Смешанное произведение векторов – *число* $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) =$
$= \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$.

Если $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$; $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$; $\vec{c} = (x_3; y_3; z_3)$, то $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

Геометрически – объемы параллелепипеда и пирамиды: $V_{пар} = \pm\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, $V_{пир} = \pm(1/6)\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. **Условие компланарности векторов:** $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$.

Задачи.

1. Найти объем пирамиды с вершинами $O(0;0;0), A(5;2;0), B(2;5;0), C(1;2;4)$, ее высоту, опущенную на плоскость OAB, длину ребра AB, площадь грани OAB.
2. Лежат ли точки $A(2;-1;-2), B(1;2;1), C(2;3;0), D(5;0;-6)$ в одной плоскости?
3. Найти объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{a}+\vec{c}$, если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ - единичные и взаимно перпендикулярные.
4. Показать, что векторы $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}, \vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}, \vec{c} = -3\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k}$ компланарны.
5. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = 3\vec{m} + 5\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$, $\vec{c} = 2\vec{m} + 7\vec{n}$, если $|\vec{m}| = 1/2$, $|\vec{n}| = 3$, угол между $\vec{m}$ и $\vec{n}$ $\alpha = 135^0$.
6. При каком значении λ векторы $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \lambda\vec{k}$, $\vec{b} = (0;1;0)$, $\vec{c} = (3;0;1)$ компланарны?
7. Даны векторы $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}, \vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$. Найти $пр_{\vec{b}}\vec{a}$.
8. Вычислить $(\vec{a} - \vec{b})^2$, если $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}, |\vec{b}| = 4,$ угол между векторами равен 135^0.

Дополнительные задачи.

1. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = -2\vec{j} + \vec{k}$.
2. Найти $|\vec{c}|$, если $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ и $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1$, угол между векторами $\varphi = \pi/3$.
3. Объем тетраэдра $v = 5$, три его вершины находятся в точках $A(2;1;-1), B(3;0;1), C(2;-1;3)$. Найти координаты четвертой вершины *D,* лежащей на оси *Ox*.
4. Показать, что векторы $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + m\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + (m+1)\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + m\vec{k}$ ни при каком m не могут быть компланарными.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч.1. Гл.II, пар.3.

1. Установить компланарность векторов $\vec{a} = (2;3;-1)$, $\vec{b} = (1;-1;3)$, $\vec{c} = (1;9;-11)$.

2. Найти объем пирамиды с вершинами $A(2;3;1), B(3;0;1), C(2;-1;3), D(-5;-4;8)$, ее высоту, опущенную на плоскость ABC, длину ребра AB, площадь грани ABC.

3. Дан вектор $\vec{a} = 2\vec{m} - \vec{n}$, где $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$, угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$ равен 120^0. Найти косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{m}$.

4. Вычислить длины диагоналей и площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{k} - \vec{j}$ и $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

5. Найти единичный вектор $\vec{d}$, зная, что $\vec{d} \perp \vec{a}, \vec{d} \perp \vec{b}$, где $\vec{a} = (2;1;1), \vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.