

Занятие 15. Нахождение пределов.

Определенные выражения при нахождении пределов: $\infty + \infty = \infty$;

$$\infty \pm A = \infty; \quad \infty \cdot A = \infty (A \neq 0); \quad \frac{A}{\infty} = 0 (A \neq 0); \quad \frac{A}{0} = \infty (A \neq 0); \quad A^\infty = \begin{cases} \infty, & A > 1, \\ 0, & A < 1. \end{cases}$$

Неопределенности: $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $\frac{0}{0}$, 1^∞ .

$\frac{\infty}{\infty}$. Разделить числитель и знаменатель дроби на наивысшую степень неизвестного, содержащуюся в дроби. При этом $\frac{A}{x^k} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

$\infty - \infty$. Разность квадратных корней умножить и разделить на их сумму; разность дробей привести к общему знаменателю; неопределенность $\infty - \infty$ приводится к неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$.

$\frac{0}{0}$. а). Многочлены в рациональной дроби разложить на множители и сократить на множитель, дающий нуль.

Задачи.

Найти пределы.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{3x^2 - 4x}. \quad 2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 1}{x^2 + 1}. \quad 3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}. \quad 4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt[3]{x^3 + 2}}{7x + \sqrt[4]{x^4 + 1}}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x + 1)^2 (2 - x)^3}{(x + 1)(1 - x)^4}. \quad 6. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x}). \quad 7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{3x^2 - 4} - \frac{x^2}{3x + 2} \right).$$

$$8. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x). \quad 9. \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}). \quad 10. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3}).$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3}. \quad 12. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 14x + 12}{x^3 + 2x^2 - 3x}. \quad 13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^n + 1}. \quad 14. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - 2x}{\sqrt[3]{1 + 8x^3}} + 2^{-x^2} \right).$$

Дополнительные задачи.

Найти пределы.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{\sqrt{3n^2 + n}}. \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 10^n}{1 + 10^{n+1}}. \quad 3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^2}{1 - x^2} + 2^{\frac{1}{x}} \right). \quad 4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 3 + \dots + 2n - 1}{n + 3} - n \right).$$

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч.1. Гл. VI, пар.4.

Найти пределы.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - 6x}{3x + 1}. \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 1}{\sqrt{9n^2 - 1}}. \quad 3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 1} - \sqrt{4x^2 - 1}}{x + 7}. \quad 4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x + 2)^3 (x - 1)^7}{3x^{10}}.$$

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4^n}{2 - 4^{n+1}}$. 6. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 4x})$. 7. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{(n^2 + 1)(n^2 - 4)} - \sqrt{n^4 - 9})$.

8. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3 - 8} \right)$. 9. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{\sqrt{3x} - 3}$. 10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1}$. 11. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x + 6}{x^3 + 8}$.