Занятие 24. Правило Лопиталя.

Если предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ представляет собой **неопределенность** $\frac{\infty}{\infty}$ или $\frac{0}{0}$, и существуют производные функций $f(x)$ и $g(x)$ в окрестностях точки a, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Если производные $f'(x), g'(x)$ обладают теми же свойствами, что и функции, то возможно повторное применение правила:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)},\ \text{и т.д.}$$

Задачи.

Вычислить пределы с помощью правила Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{tg5x}$. 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$. 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$. 4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+4x}-1+2x}{x}$. 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x-\sin x}$. 7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$. 8. $\lim\limits_{x\to\infty}5^{\frac{2x}{x+5}}$. 9. $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x$. 10. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}x^x$. 12 $\lim\limits_{x\to\pi/2}(tgx)^{2\cos x}$. 13. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\ln x}$. 14. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}}$. 15. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

Дополнительные задачи.

Вычислить пределы с помощью правила Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)^{1+x}}{x^2}-\frac{1}{x}\right]$. 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(a+x)(b+x)(c+x)}-x\right)$. 3. $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{tg\frac{\pi x}{2a}}$.

4. Пусть $x\to 0$. Доказать, что $\ln(1+x)-e\ln\ln(e+x)$ - бесконечно малая второго порядка относительно x.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч.1. Гл.VII, пар.2, п.2.

Вычислить пределы с помощью правила Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$. 2. $\lim\limits_{x\to\pi/6}\frac{1-2\sin x}{\cos 3x}$. 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$. 4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-arctgx}{x-\arcsin x}$. 6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6\sin 2x-12x}{x^3}$. 7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-3x)+3x}{x^2}$. 8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln\sin x}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x\cdot ctgx$. 10. $\lim\limits_{x\to 1}\ln x\cdot\ln(x-1)$. 11. $\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}$. 12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctgx-\frac{1}{x}\right)$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$. 14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}$. 15. $\lim\limits_{x\to\infty}[(\pi-2arctgx)\ln x]$. 16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{a}{x}\right)$.