Занятие 25. Монотонность функции. Экстремумы. Выпуклость графика функции. Асимптоты.

Монотонность: функция возрастает (убывает), если $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$).Точки, подозрительные на экстремум (**критические**): $f'(x) = 0$, $f'(x)$ не существует. **1 достаточное условие существования экстремума.** Если при переходе через критическую точку производная меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс), то в этой точке существует максимум (минимум) функции. **2 достаточное условие существования экстремума.** Если в критической точке x_0 вторая производная функции $f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) > 0$), то в этой точке существует максимум (минимум) функции. **Выпуклость** вверх (вниз) на (a,b), если на (a,b) $f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) > 0$). **Точки, подозрительные на перегиб**: $f''(x) = 0$, $f''(x)$ не существует. **Достаточное условие существования перегиба.** Если при переходе через точку, подозрительную на перегиб, вторая производная меняет знак, то в этой точке перегиб - изменение направления выпуклости функции – существует. **Вертикальные асимптоты.** Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $f(x)$, если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \pm\infty$ и (или) $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \pm\infty$. **Наклонные асимптоты** графика функции $f(x)$: $y = kx + b$, где $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx)$. **Горизонтальная асимптота** при $k = 0$: $y = b$. **Наибольшее и наименьшее значения функции** $f(x)$ на отрезке находятся либо в критических точках, принадлежащих отрезку, либо на концах отрезка.

Задачи.

1. Исследовать функции на экстремум.

1). $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x$. 2). $y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$. 3). $y = e^{2x - x^2}$. 4). $y = x^2 + \frac{16}{x} - 16$.

5). $y = \ln(9 - x^2)$.

2. Найти промежутки выпуклости вверх и вниз и точки перегиба.

1). $y = \frac{1}{1 + x^2}$. 2). $y = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 5x + 2$. 3). $y = x\,arctgx$. 4). $y = (2 - x)e^{2x}$.

5). $y = 2x^2 + \ln x$.

3. Найти и построить асимптоты графиков следующих функций.

1). $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$. 2). $y = \frac{x^2 + 5}{x^2 - 1} + 2x$. 3). $y = \frac{x + 5}{x - 3}$. 4). $y = 2x + arctgx$. 5). $y = xe^{1/x}$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на данном отрезке.

1). $f(x) = 1{,}5x^2 + \frac{81}{x}$, $[1;4]$. 2). $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$, $[0;2\pi]$.

Дополнительные задачи.

1. Показать, что функция $y = arctgx - x$ везде убывает.

2. Найти экстремум функции $y = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} - \frac{\pi}{12}x^2$.

3. При каких значениях a график функции $y = e^x + ax^3$ имеет точки перегиба?

4. Проверить, что прямая $x + y = 0$ есть асимптота линии $x^2 y + xy^2 = 1$.

5. Число 24 представьте в виде суммы двух неотрицательных слагаемых так, чтобы сумма квадратов этих чисел была наименьшей.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч.1. Гл.VII, пар.2, п.3,4,5.

1. Исследовать функции на экстремум, выпуклость и точки перегиба. Найти асимптоты графиков функций.

1). $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$. 2). $y = \frac{2x^2}{1+x^2}$. 3). $y = \frac{x}{2x-1} + x$. 4). $y = (x-1)e^{3x+1}$. 5). $y = \frac{\ln x}{x}$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на данном отрезке.

1). $f(x) = x + \frac{1}{x+2}$, $[-5;-2{,}5]$. 2). $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$, $[0;3\pi/2]$.

3. Из круглого бревна вырезают балку с прямоугольным сечением наибольшей площади. Найдите размеры сечения балки, если радиус сечения бревна равен 20 см.