Аналитическая геометрия

1. Простейшие задачи на плоскости.

Уравнение линии на плоскости $F(x,y)=0$.

Расстояние между двумя точками $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$: $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

Площадь треугольника *ABC* с вершинами в точках $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2), C(x_3,y_3)$:

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}.$$

Координаты точки M **, делящий отрезок** M_1M_2 **в данном отношении** $\lambda=\dfrac{|M_1M|}{|MM_2|}$**:**

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\; y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Координаты середины отрезка ($\lambda=1$):

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\; y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Полярные координаты: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$; $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\sin\varphi=\dfrac{y}{r}$, $\cos\varphi=\dfrac{x}{r}$.

2. Прямая на плоскости.

Уравнения прямой:
общее: $Ax+By+C=0$, вектор $\vec{n}=(A,B)$ перпендикулярен прямой;
с угловым коэффициентом: $y=kx+b$;
проходящей через данную точку $M(x_0,y_0)$ *с данным угловым коэффициентом* k: $y-y_0=k(x-x_0)$;
проходящей через две точки $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$;
в отрезках: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

Угол между двумя прямыми, заданными: *общими* уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$:

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}};$$

уравнениями *с угловым коэффициентом* $y=k_1x+b_1$, $y=k_2x+b_2$:

$$tg\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}\right|.$$

Условия параллельности прямых: $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$, $k_1=k_2$.

Условия перпендикулярности прямых: $A_1A_2+B_1B_2=0$, $k_1=-\dfrac{1}{k_2}$.

Расстояние от точки $M(x_0,y_0)$ **до прямой** $Ax+By+C=0$:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

3. Кривые 2 порядка.

Уравнение второго порядка $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ задает: *окружность* при $A = B$; *эллипс* при $AB > 0$; *гиперболу* при $AB < 0$; параболу, если $A = 0$ или $B = 0$. **Уравнения окружности:** с центром в т. $C(x_0; y_0)$ и радиусом R: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$; с центром в т. $O(0;0)$: $x^2 + y^2 = R^2$. **Каноническое уравнение эллипса:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. **Каноническое уравнение гиперболы:** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. **Канонические уравнения параболы:** $y^2 = \pm 2px, p > 0$; $x^2 = \pm 2py, p > 0$.

4. Плоскость в пространстве.

Уравнения плоскости:

проходящей через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ *перпендикулярно вектору* нормали $\vec{N} = (A, B, C)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0;$$

общее:

$$Ax + By + Cz + D = 0;\ \vec{N} = (A, B, C) \text{ - вектор нормали;}$$

в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1;$$

проходящей через три данные точки $M(x_1, y_1, z_1), M(x_2, y_2, z_2), M(x_3, y_3, z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Угол между плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Условие параллельности плоскостей: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Условие перпендикулярности плоскостей $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Расстояние от точки $M(x_0, y_0, z_o)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

5. Прямая в пространстве.

Уравнения прямой:
как *линии пересечения двух плоскостей*:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0; \end{cases}$$

проходящей через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ *параллельно вектору* $\vec{P} = (m, n, p)$: $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$

- канонические уравнения прямой;
параметрические:

$$\begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = nt + y_0, \\ z = pt + z_0; \end{cases}$$

проходящей через две данные точки $M(x_1, y_1, z_1)$, $M(x_2, y_2, z_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Угол между прямыми:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2}{\left|\vec{P}_1\right| \cdot \left|\vec{P}_2\right|} = = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Условие параллельности прямых: $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$.

Условие перпендикулярности прямых: $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$.

Расстояние от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямой $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$:

$$d = \frac{\left|S_{par}\right|}{\left|\vec{P}\right|} = \frac{\left|\overrightarrow{M_0 M_1} \times \vec{P}\right|}{\left|\vec{P}\right|}.$$

6. Взаимное расположение плоскости и прямой в пространстве.

Условие параллельности прямой $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ и плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

Угол между прямой и плоскостью:

$$\sin\alpha = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$