

## Производная и дифференциал

**Производная** от функции  $y = f(x)$  в точке  $x$ :

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

**Дифференциал функции**  $y = f(x)$ :  $dy = y'dx$ .

### Правила дифференцирования.

1.  $(u \pm v)' = u' \pm v'$ . 2.  $(u \cdot v)' = u'v + uv'$ . 3.  $(c \cdot u)' = c \cdot u'$ . 4.  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ .

### Таблица производных основных элементарных функций.

1.  $c' = 0$ . 2.  $(x^n)' = nx^{n-1}$ ;  $x' = 1$ ;  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ;  $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ .  
3.  $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ ;  $(e^x)' = e^x$ . 4.  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ ;  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ . 5.  $(\sin x)' = \cos x$ .  
6.  $(\cos x)' = -\sin x$ . 7.  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ . 8.  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ . 9.  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .  
10.  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ . 11.  $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ . 12.  $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ .

**Производная сложной функции**  $(f(u(x)))' = f'_u(u(x)) \cdot u'(x)$ .

**Логарифмическая производная:**  $(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ .

**Вторая производная:**  $f''(x) = (f'(x))'$ .

**Производная  $n$ -го порядка:**  $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$ .

**Производная показательно-степенной функции:**  $(u^v)' = vu^{v-1}u' + u^v \ln u v'$ .

**Производная неявной функции.**

Если функция  $y = f(x)$  задается соотношением  $F(x, y) = 0$ , то говорят, что она задана неявно. При нахождении производной необходимо помнить, что  $y$  является функцией аргумента  $x$ .

**Пример.**  $(x^2 y)' = 2xy + x^2 y'$ .

**Производная параметрически заданной функции.**

**Параметрически заданная функция**  $y = f(x)$ :  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ .

**Ее производная:**  $y'_x = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}$ .

**Вторая производная** параметрически заданной функции:  $y''_{xx} = (y'_x)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y''_{tt} x'_t - y'_t x''_{tt}}{x'^3_t}$ .