Приложения производной

1. Правило Лопиталя.

Если предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ представляет собой **неопределенность** $\dfrac{\infty}{\infty}$ или $\dfrac{0}{0}$, и существуют производные функций $f(x)$ и $g(x)$ в окрестностях точки a, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Если производные $f'(x), g'(x)$ обладают теми же свойствами, что и функции, то возможно повторное применение правила:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}, \text{ и т.д.}$$

2. Монотонность функции. Экстремумы. Выпуклость графика функции. Асимптоты.

Монотонность: функция возрастает (убывает), если $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$. Точки, подозрительные на экстремум (**критические**): $f'(x)=0$, $f'(x)$ не существует. **1 достаточное условие существования экстремума.** Если при переходе через критическую точку производная меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс), то в этой точке существует максимум (минимум) функции. **2 достаточное условие существования экстремума.** Если в критической точке x_0 вторая производная функции $f''(x_0)<0$ ($f''(x_0)>0$), то в этой точке существует максимум (минимум) функции. **Выпуклость** вверх (вниз) на (a,b), если на (a,b) $f''(x_0)<0$ ($f''(x_0)>0$). **Точки, подозрительные на перегиб**: $f''(x)=0$, $f''(x)$ не существует. **Достаточное условие существования перегиба.** Если при переходе через точку, подозрительную на перегиб, вторая производная меняет знак, то в этой точке перегиб - изменение направления выпуклости функции – существует. **Вертикальные асимптоты.** Прямая $x=x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $f(x)$, если $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\pm\infty$ и (или) $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=\pm\infty$.

Наклонные асимптоты графика $f(x)$: $y=kx+b$, где $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)$. **Горизонтальная асимптота** при $k=0$: $y=b$. **Наибольшее и наименьшее значения функции** $f(x)$ на отрезке находятся либо в критических точках, принадлежащих отрезку, либо на концах отрезка.