Лекция 1. Числовой ряд. Основные понятия, свойства сходящихся рядов. Знакоположительные ряды. Интегральный признак Коши

1.1. Некоторые сведения о последовательностях

Пусть каждому значению $n \in N$ поставлено в соответствие (по определённым правилам) определённое действительное число $a \in R$; тогда множество упорядоченных действительных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ называется числовой последовательностью и обозначается $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, где a_n – общий член последовательности. Например, последовательность $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5};\ldots$ имеет общий член $a_n = \frac{1}{n}$, где $n \in N$.

Определение 1. Последовательность $\{a_n\}$ называется *убывающей,* если $a_n > a_{n+1}$, $\forall n \in N$, и *возрастающей,* если $a_n < a_{n+1}$, $\forall n \in N$.

Определение 2. Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной сверху,* если существует такое число *M,* $M \in R$, что $a_n < M$, $\forall n \in N$, и *ограниченной снизу*, если существует такое число *M,* $M \in R$, что $a_n \geq M$, $\forall n \in N$.

Определение 3. Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной*, если она ограничена как снизу, так и сверху, т.е. существует такое число $M > 0$ ($M \in R$), что $\forall n: |a_n| \leq M$.

Определение 4. Число *a* называется *пределом* последовательности $\{a_n\}$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдётся такой номер $n_0 \in N$, зависящий от ε, что для всех натуральных чисел $n \geq n_0$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$. Тогда $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$ означает, что $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)\in N$ такое, что для всех $n \geq n_0$, $n\in N$: $\left|a_n - a\right| < \varepsilon$. При этом говорят, что последовательность $\{a_n\}$ сходится к числу a.

Приведём некоторые свойства сходящихся последовательностей.

–Если последовательность имеет предел, то он единственен.

–Если последовательность имеет конечный предел, то эта последовательность ограничена.

–Если последовательность возрастает (убывает) и ограничена сверху (снизу), то она имеет конечный предел.

–Если последовательность возрастает (убывает) и не ограничена сверху (снизу), то она имеет бесконечный предел $+\infty$ ($-\infty$).

1.2. Числовой ряд. Основные понятия теории числовых рядов: сходимость, расходимость, сумма ряда. Примеры

Пусть задана бесконечная последовательность чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in R$.

Определение 5. *Бесконечным числовым рядом* называется выражение вида $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$, обозначаемое как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Числа $a_1, a_2, a_3, \ldots$ называются *членами (элементами) числового ряда*.

Определение 6. Сумма первых n членов ряда называется *n-й частичной суммой ряда*: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$.Тогда

$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots$ и т.д. Получаем последовательность частичных сумм $S_1, S_2, S_3, \ldots$: $\{S_n\}$.

Таким образом, каждому числовому ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ можно поставить в соответствие последовательность частичных сумм $\{S_n\}$: $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

Определение 7. Если существует конечный или бесконечный предел S

последовательности частичных сумм $\{S_n\}$, то он называется *суммой ряда*

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Если S конечно ($S < \infty$), то ряд называется *сходящимся*; если $S = \infty$ или S не существует, то ряд называется *расходящимся* и суммы ряд не имеет.

Итак, если дан ряд, то всегда можно поставить вопрос, сходится ли он (иными словами, существует ли конечный предел $\{S_n\}$) или расходится?

Приведём примеры исследования ряда на сходимость и нахождения его суммы.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \ldots$ и найти его сумму.

Решение. Обозначим $\frac{1}{n(n+1)} = a_n$ − общий член ряда. Тогда частичная сумма ряда $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$. Так как $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, то $S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 < \infty$, т.е. ряд сходится и его сумма $S = 1$.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2 + 4n - 3} = \frac{4}{5} + \frac{4}{21} + \frac{4}{45} + \ldots$ и найти его сумму.

Решение. Обозначим $\frac{4}{4n^2 + 4n - 3} = a_n$ − общий член ряда. Тогда, частичная сумма ряда $S_n = \frac{4}{5} + \frac{4}{21} + \ldots + \frac{4}{4n^2 + 4n - 3}$. Так как

$$\frac{4}{4n^2+4n-3}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+3}, \quad \text{то}$$

$$S_n=\left(1-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)\ldots+\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n+1}\right)+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+3}\right)=$$

$$=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}=\frac{4}{3}-\frac{4n+4}{(2n+1)(2n+3)}, \text{ тогда}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}-\frac{4n+4}{(2n+1)(2n+3)}\right)=\frac{4}{3}$, т.е. ряд сходится и его сумма $S=\frac{4}{3}$.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n=1+2+3+\ldots+n+\ldots$.

Решение. Обозначим общий член ряда $n=a_n$. Тогда, частичная сумма ряда $S_n=1+2+\ldots+n=\frac{(n+1)n}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)n}{2}=+\infty$, т.е. сумма ряда $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty} n=+\infty$ и ряд расходится.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд, составленный из членов геометрической прогрессии.

Решение. Пусть дана геометрическая прогрессия $b, bq, bq^2, bq^3, \ldots, bq^{n-1}, \ldots$, где q – знаменатель прогрессии. Ряд $b+bq+bq^2+bq^3+\ldots+bq^{n-1}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty} bq^{n-1}$ называется *рядом геометрической прогрессии*. Обозначим $bq^{n-1}=a_n$ – общий член ряда. При $q\neq 1$ n- частичная сумма этого ряда равна

$$S_n=\frac{b(1-q^n)}{1-q}=\frac{b}{1-q}-\frac{bq^n}{1-q}.$$

Рассмотрим частные случаи.

–Если $|q|<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{b}{1-q}$, т.е. ряд сходится.

–Если $|q| > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, т.е. последовательность $\{S_n\}$ расходится, а значит расходится и исследуемый ряд геометрической прогрессии.

–При $q = 1$ ряд имеет вид $b + b + \ldots + b + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b$. Тогда $S_n = nb$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т.е. ряд расходится.

–При $b = 1$, $q = -1$ ряд имеет вид $b - b + b - b + \ldots$, тогда $S_1 = 1$, $S_2 = 0$, $S_3 = 1$, $S_4 = 0$, ..., $S_{2n-1} = 1$, $S_{2n} = 0$, т.е. предела последовательности $\{S_n\} = 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$ не существует, а значит, искомый ряд расходится.

Таким образом, ряд геометрической прогрессии сходится тогда и только тогда, когда $|q| < 1$, в остальных случаях ряд расходится.

1.3. Основные свойства сходящихся рядов, необходимый признак сходимости

Пусть дан числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Сформулируем его основные свойства.

Свойство 1. Если сходится ряд, полученный из данного ряда отбрасыванием или присоединением конечного числа членов, то сходится и сам данный ряд, и наоборот. Иными словами, отбрасывание или присоединение конечного числа членов ряда не влияет на сходимость ряда.

Доказательство. Пусть S_n – частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, C_k – сумма k отброшенных членов и σ_{n-k} – сумма членов ряда, входящих в сумму S_n и не входящих в сумму C_k. При достаточно большом n все отброшенные члены будут содержаться в сумме S_n, т.е. $S_n = C_k + \sigma_{n-k}$ (k – фиксированное число, C_k – const). Тогда, если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{n-k}$, то существует и

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}(C_k + \sigma_{n-k})$, т.е. исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. И наоборот, если существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то существует и $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{n-k}$, т.е. сходится составленный ряд. Аналогично доказывается сходимость при добавлении к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конечного числа членов.

Свойство 2. Если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C \cdot a_n$ (C – константа) также сходится, причём его сумма равна $C \cdot S$.

Доказательство. Пусть S_n – частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$,

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, и $\overline{S_n}$ – частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C \cdot a_n$,

$\overline{S_n} = Ca_1 + Ca_2 + \ldots + Ca_n$. Тогда $\overline{S_n} = C(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = C \cdot S_n$.

Отсюда, если существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ (ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$ сходится), то существует $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{S_n} = C \cdot \lim\limits_{n\to\infty} S_n = C \cdot S$, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C \cdot a_n$ также сходится.

Свойство 3. Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и их суммы равны A и B соответственно, то их можно почленно складывать (или вычитать), причём ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ также сходятся и их суммы равны $S = A \pm B$.

Доказательство. Пусть A_n, B_n и S_n – частичные суммы этих рядов, тогда

$S_n = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \ldots + (a_n \pm b_n) = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \pm (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) =$

$= A_n \pm B_n$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}(A_n \pm B_n) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} B_n = A \pm B.$

Теорема 1 (необходимый признак сходимости рядов). Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, тогда его общий член a_n стремится к 0 (при $n \to \infty$) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (обратное не всегда верно).

Доказательство. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна S, то для его частичных сумм S_n, S_{n-1} имеют место равенства $a_n = S_n - S_{n-1}$;
$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$. Что и требовалось доказать.

Условие сходимости, сформулированное в теореме 1, является *необходимым*, но не *достаточным*, т.е. при выполнении условия $a_n \to 0$ ряд может расходиться. Рассмотрим пример такого ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, где $\frac{1}{\sqrt{n}} = a_n$ − общий член ряда. Тогда $\lim_{n\to\infty} a_n = = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Частичная сумма ряда имеет вид $S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}$. Очевидно, каждый член этой суммы $\geq \frac{1}{\sqrt{n}}$, тогда оценка S_n даёт неравенство:

$S_n \geq \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to \infty$, следовательно,

$\lim_{n\to\infty} S_n \geq \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$, т.е. исходный ряд расходится, хотя $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$.

Следствие из теоремы 1. Если общий член ряда a_n (при $n \to \infty$) не стремится к 0, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится (*достаточный признак расходимости ряда*).

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2n}=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\ldots$.

Решение. Обозначим общий член ряда $\frac{2n-1}{2n}=a_n$. Так как

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)=1\neq 0$, то из следствия теоремы 1

следует, что ряд расходится.

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$

Решение. Общий член ряда имеет вид $a_n=\frac{1}{n}$. Данный ряд называется гармоническим, так как каждый его член равен среднему гармоническому двух соседних: $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_{n+1}}\right)$. Очевидно неравенство:

$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}}_{n}=n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$. Члены гармонического ряда, начиная с третьего, объединим в группы по 2, 4, 8, 16, …, 2^{k-1} членов в каждой группе. Очевидно, сумма каждой группы можно оценить следующим образом: $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{2}$; $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{2}$; $\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{16}>\frac{1}{2}$ ..., т.е. каждая из этих сумм в отдельности больше $\frac{1}{2}$. Таким образом, для частичных сумм с номерами $n=2^k$, $k=2,3,\ldots$ выполняются неравенства:

$S_4=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1+2\cdot\frac{1}{2}$,

$S_8=1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1+3\cdot\frac{1}{2}$, …,

$S_{2^k} > 1 + k \cdot \frac{1}{2} = \frac{2+k}{2}$,т.е. частичные суммы гармонического ряда неограниченно растут с увеличением $n = 2^k \to \infty$ при $k \to \infty$, значит, $\lim\limits_{k\to\infty} S_{2^k} = \infty$. Получаем, что гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

1.4. Знакопостоянные ряды, ряды с положительными членами

Установление сходимости или расходимости числового ряда − основной вопрос теории рядов; нахождение суммы ряда в случае его сходимости – второстепенная задача. Вопрос сходимости проще всего решается для знакопостоянных рядов, когда все члены ряда одного знака. Для определённости будем рассматривать ряды с положительными ($a_n > 0$) или с неотрицательными членами ($a_n \geq 0$). Характерным свойством таких рядов является монотонное возрастание (не убывание) последовательности частичных сумм:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ \ a_n > 0,\ S_n = S_{n-1} + a_n > S_{n-1};\ \ S_1 < S_2 < S_3 < \ldots < S_n < \ldots.$$

Ряд с положительными членами всегда имеет сумму; если эта сумма конечна, то ряд сходится.

Выяснение сходимости рядов с положительными членами опирается на признаки сходимости, которые являются либо необходимыми, либо достаточными, либо необходимыми и достаточными. В частности, к таким рядам применим приведенный выше необходимый признак сходимости рядов (теорема 1). Существует признак, являющийся необходимым и достаточным, который устанавливается следующей теоремой.

Теорема 2. Для сходимости ряда с положительными членами *необходимо и достаточно*, чтобы последовательность его частичных сумм была ограничена сверху.

Доказательство (необходимость). Пусть ряд сходится, тогда последовательность его частичных сумм сходится, а значит, она ограничена сверху.

Доказательство (достаточность). Так как последовательность частичных сумм монотонно возрастает и ограничена сверху, то она имеет предел, т.е.соответствующий ряд сходится (теорема Вейерштрасса для числовых последовательностей). Теорема доказана.

Следует отметить, что на практике этот признак трудно применим, хотя и представляет собой большой теоретический интерес.

Далее рассматриваются некоторые признаки сходимости рядов с положительными членами, удобные для практического применения, которые являются только достаточными признаками (интегральный и радикальный признаки Коши, признаки сравнения, признак Даламбера).

1.5. Интегральный признак Коши сходимости ряда с положительными членами

Теорема 3 (интегральный признак Коши). Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, члены которого удовлетворяют трём условиям:

а) $a_n > 0,\ n \geq 1$, т.е. исходный ряд с положительными членами;

б) члены ряда монотонно убывают, т.е. $a_1 > a_2 > \ldots > a_{n-1} > a_n > \ldots > 0$;

в) общий член ряда стремится к нулю: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Пусть существует непрерывная, монотонно убывающая, определённая при $x \geq 1$ функция $f(x)$, такая что $f(1) = a_1,\ f(2) = a_2,\ \ldots;\ f(n) = a_n,\ \ldots$, т.е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$. Тогда, если несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится; если указанный интеграл расходится, то этот ряд расходится.

Доказательство. Из условий теоремы $f(n) = a_n > 0$ следует $f(x) > 0$ при $x \geq 1$. Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную линиями $y = f(x)$, $x = 1$, $x = n + 1$и осью 0*x* (рис.1). Разобьём отрезок $[1; n + 1]$ точками $x = k$ $(k = 1, 2, ..., n + 1)$ и рассмотрим *n* криволинейных трапеций.

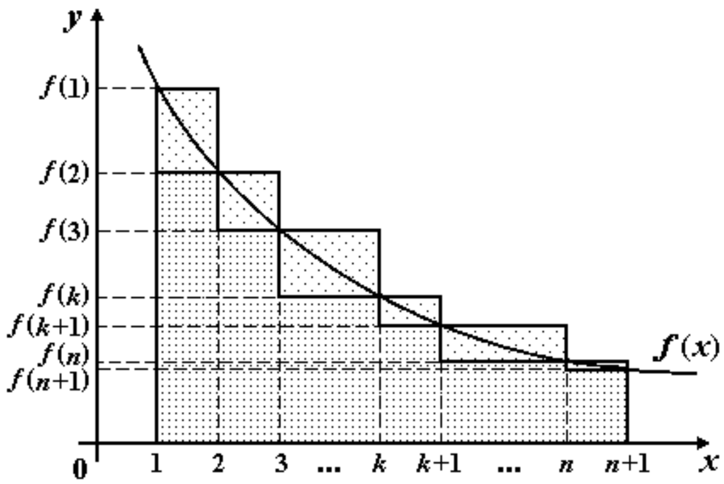

Рис. 1. Площадь криволинейной трапеции

Из геометрического смысла интеграла площадь криволинейной трапеции $S_{\text{тр}} = \int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$. Заменим эту площадь суммой площадей *n* прямоугольников с единичными основаниями:

$$S' = f(1) + f(2) + \ldots + f(n), \quad S'' = f(2) + f(3) + \ldots + f(n+1),$$

причём $S' = \sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n} a_k = S_n$, а $S'' = \sum_{k=2}^{n+1} f(k) = \sum_{k=2}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - a_1 = S_{n+1} - a_1$.

Из графика (рис. 1) следует: $S'' < S_{\text{тр}} < S'$, т.е.

$$S_n > \int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x > S_{n+1} - a_1, \ \forall n = 1, 2, \ldots.$$

Рассмотрим два случая.

1) Пусть $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ сходится, т.е. имеет конечный предел

$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=A$. Так как $\int\limits_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x\le\int\limits_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=A$, то

$(S_{n+1}-a_1)\le\int\limits_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=A$ и $S_{n+1}\le\int\limits_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x+a_1=A+a_1$.

Итак, частичные суммы ряда ограничены $\forall n\in$N, тогда по теореме 2 (необходимый и достаточный признак сходимости ряда с положительными членами) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, значит, существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n+1}=S<\infty$.

2) Пусть интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ расходится, т.е. $\int\limits_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$ неограниченно возрастает при $n\to\infty$. Тогда из неравенства $S_n>\int\limits_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$ следует, что последовательность $\{S_n\}$ неограниченно возрастает: $S_n\to\infty$, т.е. ряд расходится. Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема остаётся верной и тогда, когда её условия выполняются не для всех членов ряда, а лишь начиная с k-го ($n\ge k$), в таком случае рассматривается интеграл $\int\limits_k^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

Замечание 2. Интегральный признак Коши существенно облегчает исследование сходимости ряда, так как позволяет свести этот вопрос к выяснению сходимости интеграла от удачно подобранной соответствующей функции $f(x)$, что легко выполняется, применяя методы интегрального исчисления.