Лекция 2. Признаки сходимости рядов с положительными членами: признаки сравнения, признак Даламбера, радикальный признак Коши

2.1. Ряды Дирихле и их сходимость, гармонический ряд

Определение 1. Числовой ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ называется *рядом Дирихле* с показателем *p*, $p\in$R. Заметим, что при $p=1$ получаем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который называется *гармоническим*.

Пример 1. Исследовать ряд Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ на сходимость в зависимости от *p*.

Решение. 1) В случае, если $p\le 0$, члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ образуют неубывающую последовательность, а сам ряд расходится по необходимому признаку сходимости ($\lim\limits_{n\to\infty}a_n\ne 0$).

2) В случае $p>0$ для исследования сходимости ряда используем интегральный признак Коши. Введём функцию $f(x)=\frac{1}{x^p}$, $x\ge 1$, которая удовлетворяет всем условиям теоремы Коши (теорема 3, лекция 1, разд. 1.5): при $p>0$ она непрерывна, положительна и монотонно убывает, $f(n)=\frac{1}{n^p}=a_n$, $n\ge 1$. Вычислим несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ в двух случаях а) $0<p<1$, б) $p>1$, т.е. когда $p\ne 1$:

$$\int\limits_1^{\infty}x^{-p}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int\limits_1^{n}x^{-p}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_1^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{-p+1}}{-p+1}-\frac{1}{1-p}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{1-p}}{1-p}+\frac{1}{p-1}\right)$$

–Если $0<p<1,\ 1-p>0$, то $n^{1-p}\to\infty$ при $n\to\infty$, тогда

$\int\limits_1^{\infty} x^{-p}\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^{1-p}}{1-p}+\frac{1}{p-1}\right)=\infty$, следовательно, несобственный интеграл расходится и расходится исходный ряд.

–Если $p>1,\ 1-p<0$, то $n^{1-p}\to 0$ при $n\to\infty$, тогда

$\int\limits_1^{\infty} x^{-p}\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{p-1}(1-p)}+\frac{1}{p-1}\right)=\frac{1}{p-1}<\infty$, следовательно, несобственный интеграл сходится и сходится исходный ряд.

3) В случае $p=1$ имеем гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, для которого также применим интегральный признак Коши, т.е. рассмотрим интеграл

$\int\limits_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_1^{n}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln|x|\Big|_1^n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln n-\ln 1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\ln n=\infty$, следовательно, несобственный интеграл расходится, а значит, гармонический ряд расходится.

Вывод: ряд Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ сходится, если $p>1$, и расходится, если $p\le 1$.

2.2. Признаки сравнения рядов с положительными членами

Рассмотрим некоторые признаки, устанавливающие сходимость или расходимость рядов с положительными членами путём сравнения их с рядами, сходимость или расходимость которых известна.

Теорема 1 (I признак сравнения рядов с положительными членами).

Пусть даны 2 ряда с положительными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$.

Если, начиная с некоторого номера *N*, для всех $n\ge N$ выполняется неравенство $a_n\le b_n$, тогда

1) из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

2) из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Доказательство. На основании того, что отбрасывание конечного числа членов (свойство 1, лекция 1, разд. 1.3) не влияет на сходимость или расходимость ряда, можно считать, не нарушая общности, что условие $a_n \le b_n$ выполнено для всех $n \ge 1$. Пусть A_n − частичная сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, а B_n − частичная сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$. По условию

$A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \le b_1 + b_2 + \ldots + b_n = B_n$.

1) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то последовательность $\{B_n\}$ ограничена сверху, а значит, ограничена сверху и последовательность $\{A_n\}$. Следовательно, по теореме 2 (лекция 1, разд. 1.4) о необходимом и достаточном условии сходимости ряда с положительными членами ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, так как существует конечный предел последовательности $\{A_n\}$.

2) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то последовательность $\{A_n\}$ не ограничена, а значит, не ограничена и последовательность $\{B_n\}$. Тогда по теореме 2 (лекция 1, разд. 1.4) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится. Теорема доказана.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots$.

Решение. Обозначим $\frac{1}{\sqrt{n}} = b_n$. Сравним ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. При $n \geq 2$ $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n} = a_n$, а так как гармонический ряд расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{64} + \ldots$.

Решение. Обозначим $\frac{1}{k \cdot 2^k} = a_k$. Сравним данный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ с рядом геометрической прогрессии $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2} + 1} = 1$, который сходится, так как знаменатель прогрессии $q = \frac{1}{2}$, то первые члены ряда равны, а при $k \geq 2$, $a_k < b_k$, значит, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k}$ сходится по I признаку сравнения.

Ответ: ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k}$ сходится.

Теорема 2 (предельный признак сравнения рядов с положительными членами).

Даны 2 ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и пусть существует $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = C$, $C \neq 0$, $C \neq \infty$, тогда эти два ряда либо сходятся, либо расходятся одновременно.

Доказательство. Так как по условию $a_n > 0,\ b_n > 0,\ \forall n = 1,2,3,...$ и

$C = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, то согласно свойству предела $C \geq 0$. По условию $C \neq 0$, значит,

$C > 0$. По определению предела для всех $\varepsilon > 0$ существует окрестность

$(C - \varepsilon,\ C + \varepsilon)$ точки C такая, что $C - \varepsilon > 0$ и существует такое натуральное число N,

зависящее от ε, что для всех $n \geq N$ выполняется неравенство

$C - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < C + \varepsilon$, или $(C - \varepsilon) b_n < a_n < (C + \varepsilon) b_n$.

Если ряд $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} b_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} b_n (C + \varepsilon)$ (свойство 2, лекция 1, разд. 1.3), откуда по I признаку сравнения рядов следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n$, так как $a_n < (C + \varepsilon) b_n$.

Если же ряд $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} b_n$ расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} b_n (C - \varepsilon)$, а так как $(C - \varepsilon) b_n < a_n$, то по I признаку сравнения рядов ряд $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n$ также расходится. Теорема доказана.

Замечание. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C$, $C = 0$ или $C = \infty$, то предельный признак не применим (теорема 2 в этих случаях не верна).

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n}$.

Решение. Обозначим $\frac{1}{n^2 + 3n} = a_n$. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Так как

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2 + 3n} = 1 \neq 0$ и $\neq \infty$, то эти два ряда одновременно сходятся, или расходятся (теорема 2). Поскольку $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – ряд Дирихле с $p = 2 > 1$ сходится, следовательно, исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n}$ тоже сходится.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n}$ сходится.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

Решение. Обозначим $\frac{1}{\ln n} = a_n$. Рассмотрим гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который расходится. Так как $a_n = \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} = b_n$ $(n > \ln n \quad \forall n \geq 2)$, то по теореме 1 ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ расходится.

Ответ: ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ расходится.

2.3. Признак Даламбера сходимости рядов с положительными членами

Теорема 3 (признак Даламбера). Пусть дан ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n > 0)$, и существует конечный предел $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, тогда:

1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если $l < 1$,

2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, если $l > 1$,

3) если $l = 1$, то для выяснения сходимости ряда признак Даламбера не применим.

Доказательство. 1) Пусть предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$ существует и $0\le l<1$.

Рассмотрим число q такое, что $l<q<1$. Из определения предела следует, что $\forall\varepsilon=q-l>0$ существует $N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, начиная с которого $\forall n\ge N=N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-l\right|<q-l,$

$l-q<\frac{a_{n+1}}{a_n}-l<q-l,\ 2l-q<\frac{a_{n+1}}{a_n}<q$. Таким образом, $\forall n\ge N\ \ \frac{a_{n+1}}{a_n}<q$, т.е. $a_{n+1}<q\cdot a_n$. Берём $n=N, N+1, N+2,\ldots$, тогда $a_{N+1}<q\cdot a_N$, $a_{N+2}<qa_{N+1}<q^2a_N,\ a_{N+3}<q\cdot a_{N+2}<q^3a_N,\ \ldots,\ a_{N+k}<q^k a_N$.

Запишем исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ $(a_n>0)$ в виде:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\ldots+a_N+a_{N+1}+a_{N+2}+\ldots$. Рассмотрим новый ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_N\cdot q^k=a_N+qa_N+q^2a_N+\ldots$. Этот ряд есть ряд геометрической прогрессии с $b_1=a_N$ и $0<q<1$, который сходится, а значит, сходится ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_{N+k}=a_N+a_{N+1}+a_{N+2}+\ldots$, так как $a_{N+k}<q^k a_N$ $(k=1, 2, 3,\ldots)$ на основании теоремы 1. Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_{N+k}$ получен из исходного $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ отбрасыванием конечного числа членов $a_1,a_2,\ldots,a_{N-1}$, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится (свойство 1, лекция 1, разд. 1.3). Таким образом, исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l,\ \ l<1$. Первая часть теоремы доказана.

2) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l>1$. Рассмотрим число q такое, что $l>q>1$.

$\varepsilon=l-q>0$, из определения предела

следует: $-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}-l<\varepsilon, l-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}<l+\varepsilon, \frac{a_{n+1}}{a_n}>q>1$.Таким образом,

$a_{n+1}>a_n>0$ и при $n\to\infty$ общий член ряда a_n не стремится к 0, т.е. ряд

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится, так как не выполняется необходимое условие сходимости

ряда (теорема 1, лекция 1, разд. 1.3). Вторая часть теоремы доказана.

3) Если $l=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ равен единице или не существует, в этом

случае для выяснения сходимости ряда признак Даламбера не применим.

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.

Решение. Обозначим $\frac{n}{2^n}=a_n$, $a_n>0$; найдём $a_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}}$. Составим предел

$l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^n}{2^n\cdot 2\cdot n}=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}<1$, т.е. по признаку Даламбера

ряд сходится.

Ответ: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ сходится.

Пример *7*. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}$.

Решение. Обозначим $\frac{n!}{5^n}=a_n, a_n>0$; найдём $a_{n+1}=\frac{(n+1)!}{5^{n+1}}$. Составим предел

$l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot 5^n}{5^{n+1}\cdot n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!\cdot(n+1)\cdot 5^n}{5^n\cdot 5\cdot n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{5}=\infty>1,$

т.е. по признаку Даламбера ряд расходится.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$ расходится.

2.4. Радикальный признак Коши сходимости рядов с положительными членами

Теорема 4 (радикальный признак Коши). Пусть дан ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n > 0$ и пусть существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.Тогда:

1) если $l < 1$, ряд сходится,
2) если $l > 1$, ряд расходится,
3) если $l = 1$, то для выяснения сходимости ряда радикальный признак Коши не применим.

Доказательство. 1) Пусть существует $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l < 1$; так как $a_n > 0$, то $l \geq 0$. Рассмотрим число q такое, что $l < q < 1$. Из определения предела следует, что $\forall \varepsilon = q - l > 0$ существует $N = N(\varepsilon) \in \mathrm{N}$, начиная с которого $\forall n \geq N$ выполняется неравенство $\left|\sqrt[n]{a_n} - l\right| < q - l,\ l - q < \sqrt[n]{a_n} - l < q - l,\ \sqrt[n]{a_n} < q$, $a_n < q^n\ \ \forall n \geq N$. Распишем исходный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots\ . \qquad (1)$$

Составим новый ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^{N+k} = q^N + q^{N+1} + q^{N+2} + \ldots\ . \qquad (2)$$

Ряд (2) представляет собой ряд геометрической прогрессии со знаменателем q: $0 \leq q < 1$, т.е. этот ряд сходится, а значит, ряд (1) сходится по I признаку сравнения рядов (теорема 1 данной лекции).

2) Пусть существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l>1$. Начиная с некоторого $N=N(\varepsilon)\in\mathrm{N}$ $\forall n\ge N$, $\sqrt[n]{a_n}>1 \Rightarrow a_n>1$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\ne 0$, тогда исходный ряд расходится по необходимому признаку сходимости (теорема 1, лекция 1, разд. 1.3).

3) Если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l=1$ (или не существует), то для выяснения сходимости ряда радикальный признак Коши не применим. Теорема доказана.

Пример 8. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$

Решение. Обозначим $\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n=a_n$, $a_n>0$. Составим предел:

$l=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to}\dfrac{n}{2n+1}=\dfrac{1}{2}<1$, т.е. по радикальному признаку Коши ряд сходится.

Ответ: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$ сходится.