

Практика 1

Числовые ряды. Свойства и сходимость рядов. Признаки сходимости.

П.1. Основные определения. Свойства рядов

Определение. Сумма членов бесконечной числовой последовательности $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ называется **числовым рядом**.

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (1)$$

где u_1, u_2, \dots будем называть членами ряда;
 u_n – общим членом ряда.

Определение. Суммы $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k$, $n = 1, 2, \dots$ называются **частными (частичными) суммами** ряда.

Таким образом, возможно рассматривать последовательности частных сумм ряда $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$

Определение. Ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется **сходящимся**, если сходится последовательность его частных сумм. **Сумма сходящегося ряда** – предел последовательности его частных сумм.

$$\lim S_n = S, \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Определение. Если последовательность частных сумм ряда расходится, т.е. не имеет предела, или имеет бесконечный предел, то ряд называется **расходящимся** и ему не ставят в соответствие никакой суммы.

Свойства рядов:

1) Сходимость или расходимость ряда не нарушится, если изменить, отбросить или добавить конечное число членов ряда.

2) Рассмотрим два ряда $\sum u_n$ и $\sum C u_n$, где C – постоянное число.

Теорема 1. Если ряд $\sum u_n$ сходится и его сумма равна S , то ряд $\sum C u_n$ тоже сходится, и его сумма равна CS . ($C \neq 0$)

3) Рассмотрим два ряда $\sum u_n$ и $\sum v_n$. **Суммой** или **разностью** этих рядов будет называться ряд $\sum (u_n \pm v_n)$, где элементы получены в результате сложения (вычитания) исходных элементов с одинаковыми номерами.

Теорема 2. Если ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ сходятся и их суммы равны соответственно S и σ , то ряд $\sum (u_n \pm v_n)$ тоже сходится и его сумма равна $S + \sigma$.

$$\sum (u_n + v_n) = \sum u_n + \sum v_n = S + \sigma \quad (2)$$

Разность двух сходящихся рядов также будет сходящимся рядом.
 Сумма сходящегося и расходящегося рядов будет расходящимся рядом.
 О сумме двух расходящихся рядов общего утверждения сделать нельзя.

При изучении рядов решают в основном две задачи: исследование на сходимость и нахождение суммы ряда.

Критерий Коши

(необходимые и достаточные условия сходимости ряда)

Для того, чтобы последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер N , что при $n > N$ и любом $p > 0$, где p – целое число, выполнялось бы неравенство: $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$.

Доказательство. (необходимость)

Пусть $a_n \rightarrow a$, тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что неравенство

$|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ выполняется при $n > N$. При $n > N$ и любом целом $p > 0$ выполняется также неравенство

$|a - a_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Учитывая оба неравенства, получаем:

$$|a_{n+p} - a_n| = |(a_{n+p} - a) + (a - a_n)| \leq |a_{n+p} - a| + |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Необходимость доказана. Доказательство достаточности рассматривать не будем.

Сформулируем

Критерий Коши для ряда

Для того, чтобы ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ был сходящимся необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал номер N такой, что при $n > N$ и любом $p > 0$ выполнялось бы неравенство $|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon$.

Однако на практике использовать непосредственно критерий Коши не очень удобно. Поэтому часто используются более простые признаки сходимости:

1) Если ряд $\sum u_n$ сходится, то необходимо, чтобы общий член u_n стремился к нулю. Но это условие не является достаточным. Можно говорить только о том, что если общий член не стремится к нулю, то ряд точно расходится. Например, так называемый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ является расходящимся, хотя его общий член и стремится к нулю.

Пример 1. Исследовать сходимость ряда $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n}{3n-1} + \dots$

Найдем $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{3} \neq 0$ – необходимый признак сходимости не выполняется, из этого

следует, что ряд расходится.

2) Если ряд сходится, то последовательность его частных сумм ограничена.

Однако этот признак также не является достаточным.

Например, ряд $1-1+1-1+1-1+ \dots +(-1)^{n+1}+\dots$ расходится, т.к. расходится последовательность его частных сумм в силу того, что

$$S_n = \begin{cases} 0, & \text{при четных } n \\ 1, & \text{при нечетных } n \end{cases}$$

Однако при этом последовательность частных сумм ограничена, т.к. $|S_n| < 2$ при любом n .

П.2. Ряды с неотрицательными членами

При изучении знакопостоянных рядов ограничимся рассмотрением рядов с неотрицательными членами, т.к. при простом умножении на -1 из этих рядов можно получить ряды с отрицательными членами.

Теорема 3. Для сходимости ряда $\sum u_n$ с неотрицательными членами необходимо и достаточно, чтобы частные суммы ряда были ограничены.

Признак сравнения рядов с неотрицательными членами.

Пусть даны два ряда $\sum u_n$ и $\sum v_n$ при $u_n, v_n \geq 0$.

Теорема 4. Если $u_n \leq v_n$ при любом n , то из сходимости ряда $\sum v_n$ следует сходимость ряда $\sum u_n$, а из расходимости ряда $\sum u_n$ следует расходимость ряда $\sum v_n$.

Доказательство. Обозначим через S_n и σ_n частные суммы рядов $\sum u_n$ и $\sum v_n$. Т.к. по условию теоремы ряд $\sum v_n$ сходится, то его частные суммы ограничены, т.е. при всех n $\sigma_n < M$, где M – некоторое число. Но т.к. $u_n \leq v_n$, то $S_n \leq \sigma_n$ то частные суммы ряда $\sum u_n$ тоже ограничены, а этого достаточно для сходимости.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \dots + \frac{1}{\ln n} + \dots$

Т.к. $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$, а гармонический ряд $\sum \frac{1}{n}$ расходится, то расходится и ряд $\sum \frac{1}{\ln n}$.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Т.к. $\frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n}$, а ряд $\sum \frac{1}{2^n}$ сходится (как убывающая геометрическая прогрессия), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ тоже сходится.

Также используется следующий признак сходимости:

Теорема 5. Если $u_n > 0$, $v_n > 0$ и существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = h$, где h – число, отличное от нуля,

то ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ ведут одинаково в смысле сходимости.

П.3. Признаки Коши и Даламбера

Признак Даламбера

(Жан Лерон Даламбер (1717 – 1783) – французский математик)

Если для ряда $\sum u_n$ с положительными членами существует такое число $q < 1$, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q,$$

то ряд $\sum u_n$ сходится, если же для всех достаточно больших n выполняется условие

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1,$$

то ряд $\sum u_n$ расходится.

Предельный признак Даламбера

Предельный признак Даламбера является следствием из приведенного выше признака Даламбера.

Если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, то при $\rho < 1$ ряд сходится, а при $\rho > 1$ – расходится.

Если $\rho = 1$, то на вопрос о сходимости ответить нельзя.

Пример 4. Определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

$$u_n = \frac{n}{2^n}; \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

Вывод: ряд сходится.

Пример 5. Определить сходимость ряда $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$

$$u_n = \frac{1}{n!}; \quad u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

Вывод: ряд сходится.

Признак Коши (радикальный признак)

Если для ряда $\sum u_n$ с неотрицательными членами существует такое число $q < 1$, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{u_n} \leq q,$$

то ряд $\sum u_n$ сходится, если же для всех достаточно больших n выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{u_n} \geq 1,$$

то ряд $\sum u_n$ расходится.

Следствие. Если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, то при $\rho < 1$ ряд сходится, а при $\rho > 1$ ряд расходится.

Пример 6. Определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2 + 1}{3n^2 + 5} \right)^n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{3n^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{5}{n^2}} = \frac{2}{3} < 1$$

Вывод: ряд сходится.

Пример 7. Определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1.$$

Т.е. признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Проверим выполнение необходимых условий сходимости. Как было сказано выше, если ряд сходится, то общий член ряда стремится к нулю.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e \neq 0,$$

таким образом, необходимое условие сходимости не выполняется, значит, ряд расходится.

Интегральный признак Коши

Если $\varphi(x)$ – непрерывная положительная функция, убывающая на промежутке $[1; \infty)$, то ряд $\varphi(1) + \varphi(2) + \dots + \varphi(n) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)$ и несобственный интеграл $\int_1^{\infty} \varphi(x) dx$ одинаковы в смысле сходимости.

Пример 8. Ряд $1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится $\alpha \leq 1$ т.к. соответствующий несобственный интеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится $\alpha \leq 1$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ называется **общегармоническим** рядом.

Следствие. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ – непрерывные функции на интервале $(a, b]$ и $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = h, h \neq 0$, то интегралы $\int_a^b f(x) dx$ и $\int_a^b \varphi(x) dx$ ведут себя одинаково в смысле сходимости.