Лекция 3

Функциональные ряды. Ряд Фурье.

П.1. Функциональные ряды

Определение. **Частными (частичными) суммами** функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называются функции $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad n = 1,2,...$

Определение. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **сходящимся** в точке ($x=x_0$), если в этой точке сходится последовательность его частных сумм. Предел последовательности $\{S_n(x_0)\}$ называется **суммой** ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ в точке x_0.

Определение. Совокупность всех значений x, для которых сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **областью сходимости** ряда.

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **равномерно сходящимся** на отрезке [a,b], если равномерно сходится на этом отрезке последовательность частных сумм этого ряда.

Теорема 1. (Критерий Коши равномерной сходимости ряда)

Для равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *необходимо и достаточно, чтобы для любого числа ε>0 существовал такой номер N(ε), что при n>N и любом целом p>0 неравенство* $\left|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)\right| < \varepsilon$ *выполнялось бы для всех x на отрезке [a,b].*

Теорема 2. (Признак равномерной сходимости Вейерштрасса)
(Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815 – 1897) – немецкий математик)

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится равномерно и притом абсолютно на отрезке [a,b], если модули его членов на том же отрезке не превосходят соответствующих членов сходящегося числового ряда с положительными членами:* $M_1 + M_2 + \ldots + M_n + \ldots$
т.е. имеет место неравенство: $\left|u_n(x)\right| \le M_n$.

Еще говорят, что в этом случае функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ **мажорируется** числовым рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{M}_n$.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$.

Так как $|\cos nx| \le 1$ всегда, то очевидно, что $\left|\frac{\cos nx}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}$.

При этом известно, что общегармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ при α=3>1 сходится, то в соответствии с признаком Вейерштрасса исследуемый ряд равномерно сходится и притом в любом интервале.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3}$.

На отрезке [-1,1] выполняется неравенство $\left|\frac{x^n}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}$ т.е. по признаку Вейерштрасса на этом отрезке исследуемый ряд сходится, а на интервалах (-∝, -1) ∪ (1, ∝) расходится.

Свойства равномерно сходящихся рядов

1) **Теорема о непрерывности суммы ряда.**

Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ *– непрерывные на отрезке [a,b] функции и ряд сходится равномерно, то и его сумма S(x) есть непрерывная функция на отрезке [a,b].*

2) **Теорема о почленном интегрировании ряда.**

Равномерно сходящийся на отрезке [a,b] ряд с непрерывными членами можно почленно интегрировать на этом отрезке, т.е. ряд, составленный из интегралов от его членов по отрезку [a,b] , сходится к интегралу от суммы ряда по этому отрезку.

$$\int_\alpha^\beta \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_\alpha^\beta u_n(x)dx; \quad \alpha,\beta \in [a,b]$$

3) **Теорема о почленном дифференцировании ряда.**

Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ *сходящегося на отрезке [a,b] представляют собой непрерывные функции, имеющие непрерывные производные, и ряд, составленный из этих производных* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ *сходится на этом отрезке равномерно, то и данный ряд сходится равномерно и его можно дифференцировать почленно.*

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{du_n(x)}{dx}$$

На основе того, что сумма ряда является некоторой функцией от переменной *x*, можно производить операцию представления какой-либо функции в виде ряда (разложения функции в ряд), что имеет широкое применение при интегрировании, дифференцировании и других действиях с функциями.

На практике часто применяется разложение функций в степенной ряд.

П.2. Ряды Фурье для функций любого периода

Ряд Фурье для функции *f(x)* периода *T* = *2l*, непрерывной или имеющей конечное число точек разрыва первого рода на отрезке [-*l*, *l*] имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n}{l}x + b_n \sin\frac{\pi n}{l}x\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n}{l}xdx, \quad n = 1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx, \quad n = 1,2,\ldots$$

Для четной функции произвольного периода разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n}{l}x;$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n}{l}xdx; \quad n = 1,2,\ldots$$

Для нечетной функции:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n}{l}x;$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx; \quad n = 1,2,\ldots$$

П.3. Ряд Фурье по ортогональной системе функций

Определение. Функции φ(x) и ψ(x), определенные на отрезке [a, b], называются **ортогональными** на этом отрезке, если $\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = 0$

Определение. Последовательность функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, φn(x), непрерывных на отрезке [a, b], называется **ортогональной системой функций** на этом отрезке, если все функции попарно ортогональны (1).

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = 0; \qquad i \neq j \tag{1}$$

Отметим, что ортогональность функций не подразумевает перпендикулярности графиков этих функций.

Определение. Система функций называется **ортогональной и нормированной (ортонормированной)**, если

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \tag{2}$$

Определение. **Рядом Фурье по ортогональной системе функций** $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …,$\varphi n(x)$ называется ряд вида: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ коэффициенты которого определяются по формуле (3):

$$a_n = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\int_a^b [\varphi_n(x)]^2 dx} \tag{3}$$

где

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ – сумма равномерно сходящегося на отрезке [a, b] ряда по ортогональной системе функций;

f(x) – любая функция, непрерывная или имеющая конечное число точек разрыва первого рода на отрезке [a, b].

В случае ортонормированной системы функций коэффициенты определяются (4):

$$a_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx \tag{4}$$

П.4. Интеграл Фурье

Пусть функция *f(x)* на каждом отрезке [-*l*,*l*], где *l* – любое число, кусочно-гладкая или кусочно-монотонная, кроме того, *f(x)* – абсолютно интегрируемая функция, т.е. сходится несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$

Тогда функция *f(x)* разлагается в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n}{l}x + b_n \sin\frac{\pi n}{l}x\right)$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n}{l}tdt, \quad n = 0,1,2,...$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{\pi n}{l}tdt, \quad n = 1,2,...$$

Если подставить коэффициенты в формулу для f(x), получим:

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi n}{l}tdt\cos\frac{\pi n}{l}x+\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{\pi n}{l}tdt\sin\frac{\pi n}{l}x\right)=$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi n}{l}(t-x)dt$$

Переходя к пределу при $l\to\infty$, можно доказать, что $\lim\limits_{l\to\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt=0$ и

$$f(x)=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi n}{l}(t-x)dt$$

Обозначим $u_n=\frac{\pi n}{l}$; $\Delta u_n=u_{n+1}-u_n=\frac{\pi}{l}$; $\frac{1}{l}=\frac{\Delta u_n}{\pi}$;

При $l\to\infty$ $\Delta u_n\to 0$.

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\lim_{l\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta u_n\int_{-l}^{l}f(t)\cos u_n(t-x)dt$$

Можно доказать, что предел суммы, стоящий в правой части равенства равен интегралу

$$\int_{0}^{\infty}du\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos u(t-x)dt$$

Тогда

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}du\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos u(t-x)dt \qquad (5)$$

– **двойной интеграл Фурье.**

Окончательно получаем:

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}\left[a(u)\cos ux+b(u)\sin ux\right]du$$

$$a(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos utdt \qquad (6)$$

$$b(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin utdt$$

- представление функции f(x) **интегралом Фурье**.

Двойной интеграл Фурье для функции f(x) можно представить в комплексной форме:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{iu(x-t)}dt \tag{7}$$

П.5. Преобразование Фурье

Определение. Если *f(x)* – любая абсолютно интегрируемая на всей числовой оси функция, непрерывная или имеющая конечное число точек разрыва первого рода на каждом отрезке, то функция

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}dx \tag{8}$$

называется **преобразованием Фурье функции *f(x)*.**

Функция *F(u)* называется также **спектральной характеристикой функции *f(x)*.**

Если f(x) – функция, представимая интегралом Фурье, то можно записать:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{iux}du \tag{9}$$

Равенство (9) называется **обратным преобразованием Фурье**

Интегралы

$$F(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(x)\cos uxdx \tag{10}$$

и

$$F(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(x)\sin uxdx \tag{11}$$

называются соответственно (10) – **косинус – преобразование Фурье и (11) – синус – преобразование Фурье.**

Косинус – преобразование Фурье будет преобразованием Фурье для четных функций, синус – преобразование – для нечетных.

Преобразование Фурье применяется в функциональном анализе, гармоническом анализе, операционном исчислении, теории линейных систем и др.