Задания по теме «Ряды»

2. Знакопеременные ряды

2.1. Понятие знакопеременного ряда

Числовой ряд $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$ называется *знакопеременным*, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные числа. Числовой ряд называется *знакочередующимся*, если любые два стоящие рядом члена имеют противоположные знаки:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + (-1)^{n+1} \cdot u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot u_n,$$

где $u_n > 0$ для всех $n \in N$, т.е. ряд, положительные и отрицательные члены которого следуют друг за другом поочередно. Например,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...,$$
$$\frac{1}{1} - \frac{2}{3} + \frac{3}{5} - \frac{4}{7} + ... + (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{2n-1} + ...,$$
$$\frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{3}{8} - \frac{4}{16} + ... + (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{2n} + ...$$

Для знакочередующихся рядов имеет место достаточный признак сходимости – признак Лейбница.

2.2. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость ряда

Теорема (признак Лейбница). Знакочередующийся ряд сходится, если:

1) последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает, т.е. $u_1 > u_2 > ... > u_n ...$.

2) общий член ряда стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} u_{n=0}$. При этом сумма S ряда удовлетворяет неравенствам $0 < S < u_1$.

Пусть дан знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где a_n – произвольные числа (действительные или комплексные). Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, составленный из абсолютных величин его членов, сходится, то данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится. В этом случае знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся.* Следовательно, если же знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *условно сходящимся*.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{2\sqrt{n}-1}$

Решение. 1. Исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ из абсолютных величин членов данного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{n}-1}$. Сравним этот ряд с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

Так как $2\sqrt{n}-1 < 2\sqrt{n}$, то $\dfrac{1}{2\sqrt{n}-1} > \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ для всех *n*.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ расходится, так как расходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (как ряд Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ при p=$\dfrac{1}{2}$<1). Значит, по 1-му признаку сравнения расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{n}-1}$.

Итак, исходный ряд не является абсолютно сходящимся.

2. Выясним, сходится ли данный знакочередующийся ряд, применяя признак Лейбница.

•Проверим, выполняется ли неравенство $a_n > a_{n+1}$ для абсолютных величин членов данного ряда:

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{n}-1} > \frac{1}{2\sqrt{n+1}-1} = a_{n+1}.$$

Данное неравенство эквивалентно неравенству $2\sqrt{n}-1 < 2\sqrt{n+1}-1$, которое верно для любого n=1,2….Значит $a_n > a_{n+1}$ для все номеров n = 1,2…

•Найдём предел общего члена ряда: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}+1} = 0.$

Таким образом, для данного знакочередующегося ряда выполнены оба условия, содержащиеся в признаке Лейбница, откуда следует, что исходный ряд сходится, однако он не является абсолютно сходящимся, поэтому данный ряд сходится условно.

Ответ: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2\sqrt{n}-1}$ сходится условно.

Задание 6. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n}$	6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln^2 n}$
2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+1}$	7) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{n!}$
3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n \ln n}{n}$	8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$
4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$	9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}$

5) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2\ln n}$ 10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1}$

Ответы:

Задание 6. 1) абсолютно сходится, 2) условно сходится, 3) условно сходится, 4) условно сходится, 5) абсолютно сходится, 6) абсолютно сходится, 7) абсолютно сходится, 8) абсолютно сходится, 9) условно сходится, 10) условно сходится.