Задания по теме «Ряды»

3. Функциональные ряды

3.1. Понятие функционального ряда

Ряд, членами которого являются функции от x, называется *функциональным*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x_1) + u_2(x_2) + \ldots + u_n(x_n) + \ldots .$$

Придавая x определенное значение x_0, получим числовой ряд

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \ldots + u_n(x_0) + \ldots,$$

который может быть как сходящимся, так и расходящимся. Если полученный числовой ряд сходится, то точка x_0 называется *точкой сходимости* функционального ряда; если же ряд расходится – *точкой расходимости* функционального ряда.

Совокупность числовых значений аргумента *x*, при которых функциональный ряд сходится, называется его *областью сходимости*. В области сходимости функционального ряда его сумма является некоторой функцией от x: $S = S(x)$. Определяется она в области сходимости равенством $S(x) = \lim\limits_{n \to \infty} S_n(x)$, где $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$ – частичная сумма ряда.

3.2. Степенные ряды

Степенным рядом называется ряд вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots .$$

Областью сходимости степенного ряда называется множество всех значений x, при которых данный ряд сходится.

Число R называется *радиусом сходимости* степенного ряда, если при $|x|<R$ ряд сходится и притом абсолютно, а при $|x|>R$ ряд расходится. Радиус сходимости найдем, используя признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1,\quad |x| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,$$

т.е. если степенной ряд сходится при любых x, удовлетворяющих данному условию и расходится при $|x| < \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Отсюда следует, что если существует предел $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|(a_n \neq 0, n = 1,2,3,...)$,то радиус сходимости ряда R равен этому пределу и степенной ряд сходится при $|x|<R$, т.е. в промежутке $(-R,R)$, который называется *промежутком (интервалом) сходимости.*

Если $R=0$, то степенной ряд сходится в единственной точке $x=0$. На концах промежутка ряд может сходиться (абсолютно или условно), но может и расходиться.

Сходимость степенного ряда при $x=R$ и $x=-R$ исследуется с помощью какого-либо из признаков сходимости.

Пример 2. Найти область сходимости ряда.

Решение. Найдём радиус сходимости ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{n2^{n-1}}$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}:\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^{n}}{n\cdot 2^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^{n}\cdot 2}{n\cdot 2^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot(n+1)}{n}=2.$$

Следовательно, ряд сходится при $-2<x+1<2$, т.е. при $-3<x<1$.

При $x=-3$ имеем ряд $2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n}$, который сходится по признаку Лейбница.

При $x=1$ имеем расходящийся ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n}}{n\cdot 2^{n-1}}=2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Ответ: областью сходимости исходного ряда является промежуток $[-3,1)$

***Задание** 7*. Найти область сходимости степенного ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}x^{n}}{n2^{n}}$	6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{n}}{3^{n}n\sqrt{n}}$
2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}x^{n}3^{n}}{n}$	7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n}n}{4^{n}}$
3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}2^{n}}{n^{2}}$	8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^{n}}{3^{n}}$
4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}(n+1)}{4^{n}n}$	9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^{2n}}{3^{n}}$
5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^{n}}{2^{n}\sqrt{n}}$	10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n+1}}{4^{n}n}$

Ответы:

Задание 7. 1) (-2;2], 2) $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]$, 3) $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$, 4) (-4;4), 5) [-3;1), 6) [-1;5], 7) (-6;2), 8) (-2;1), 9) $\left(-\sqrt{3}-1;\sqrt{3}-1\right)$, 10) (0;4).