Классическое и геометрическое определения вероятности

Будем говорить, что произведен *стохастический эксперимент*, если результат этого эксперимента нельзя указать заранее. При этом известно множество возможных результатов эксперимента и это множество не изменяется при повторных экспериментах. Кроме того, стохастический эксперимент допускает возможность многократного повторения.

Определение. Элементарным исходом эксперимента ω называется результат, которым завершился стохастический эксперимент.

Множество элементарных исходов эксперимента обозначается Ω. Записывают $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots.., \omega_n\}$.

Определение. Случайным событием A называется любое подмножество множества элементарных исходов экперимента Ω, т.е. $A \subset \Omega$, $A = \{\omega_{i_1}, \ldots., \omega_{i_k}\}$, где $i_1, \ldots., i_k$ – некоторая перестановка индексов элементов множества Ω.

Классическое определение вероятности

Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots.., \omega_n\}$ – конечное множество равновозможных исходов, а $A = \{\omega_{i_1}, \ldots., \omega_{i_k}\}$–некоторое событие. Тогда вероятность события A вычисляется по формуле:

$$P(A) = \frac{k}{n}, \tag{1}$$

где k– количество исходов, благоприятствующих событию A, а n– общее количество исходов эксперимента.

Задача.

В урне находится a белых и b черных шаров. Из урны вынимают наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар – белый.

Решение.

Стохастический эксперимент состоит в извлечении одного шара из урны, следовательно, элементарный исход эксперимента можно определить как «извлечен один шар».

Для указания множества Ω необходимо перечислить все мыслимые в данном эксперименте исходы. Для рассматриваемого эксперимента можно записать: $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_a, \omega_{a+1}, \ldots, \omega_{a+b}\}$. Тогда событие $A = \{\omega_1, \ldots, \omega_a\}$.

Таким образом, $n = a + b$, $k = a$, и вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{a}{a+b}.$$

Сведения из комбинаторики.

При нахождении вероятностей в схеме классического определения используются элементы комбинаторики. Приведем некоторые необходимые определения.

Пусть имеется конечное множество $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ некоторых элементов.

Определение. Сочетанием из n элементов множества X по k называется любое подмножество $\{x_{i_1}, ..., x_{i_k}\}$ содержащее k элементов, то есть сочетания представляют собой подмножества, различающиеся только составом элементов.

Число всех сочетаний C_n^k (из n элементов по k) вычисляется по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{2}$$

Пример. Пусть $X = \{a, b, c, d\}$ – множество букв латинского алфавита. Составим сочетания из 4 по 3. Получаем: $\{(a,b,c),\quad (a,b,d),\quad (a,c,d),\quad (b,c,d)\}$.

Определение. Размещением из n элементов множества X по k элементам (из n элементов по k) называется любой упорядоченный набор ($x_{i_1}, ..., x_{i_k}$) элементов множества X.

Таким образом, размещения представляют собой такие подмножества, в которых различают не только состав, но и порядок следования элементов.

Число всех размещений A_n^k (из n элементов по k) определяется формулой:

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot .... \cdot (n-k+1). \tag{3}$$

Пример. Пусть по-прежнему $X = \{a, b, c, d\}$ – множество букв латинского алфавита. Составим теперь размещения из 4 по 3. Получаем: $\{(a,b,c),\quad (a,c,b),\quad (b,a,c),\quad (b,c,a),\quad (c,a,b),\quad (c,b,a),......(d,c,b)\}$. Всего 24 размещения.

Определение. Перестановкой из n элементов по n называется размещение A_n^n (другими словами, n элементов по n местам).

Число всех перестановок P_n вычисляется по формуле:

$$P_n = n! \tag{4}$$

1.1.Классическое определение вероятностей. Задачи

1. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу вытащенный кубик будет иметь: 1) одну окрашенную грань; 2) не более двух окрашенных граней; 3) не менее одной окрашенной грани.
2. Из чисел 3, -5, 2, 1, -2, -4 наугад выбираются три числа. Какова вероятность того, что их сумма положительна.
3. Три математических и семь художественных книг расставлены на полке в случайном порядке. Какова вероятность того, что все книги по математике будут стоять рядом?
4. Вытаскиваются две карты из колоды в 36 карт. Какова вероятность того, что одна из них туз, а другая - пиковой масти?
5. В урне 10 белых и 5 черных шаров. Вытаскиваются два шара. Какова вероятность, что хотя бы один из них белый?
6. В лифт восьмиэтажного дома на первом этаже вошли пять человек. Каждый из них с равной вероятностью может выйти на любом этаже, начиная со второго. Найти вероятность того, что: 1) все выйдут на разных этажах; 2) все выйдут на 5 этаже; 3) все выйдут одновременно.
7. В карточке «Спортлото» 49 номеров. Какова вероятность угадать 4 номера из 6? Не менее четырех?
8. Ящик содержит 90 годных и 10 бракованных деталей. Найти вероятность того, что среди 10 вынутых из ящика деталей нет бракованных.

1.2.Геометрическая вероятность

В случае, когда множество Ω элементарных исходов эксперимента представляет собой некоторое подмножество в пространстве R^n, $n = 1,2,3$ вероятность события A определяют по формуле

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}, \tag{5}$$

где $\mu(A)$- мера множества A в пространстве R^n.

1. В окружность вписан правильный треугольник. Какова вероятность того, что точка, случайно брошенная в круг, попадет в треугольник?
2. В квадрат вписан круг. Найти вероятность того, что точка, случайно брошенная в квадрат, попадет в круг.
3. Две трети отрезка окрашены в зеленый цвет, а оставшаяся треть – в красный. Какова вероятность того, что при случайном разломе зеленая часть сохранится полностью?

4. Кусок проволоки длиною 20 см. согнули в случайно выбранной точке под прямым углом. Затем на большей части куска сделали еще два изгиба так, что в итоге получился прямоугольник. Какова вероятность того, что его площадь не превосходит 21 см^2?

1.3. Задачи для самостоятельного решения

1. В книге 300 страниц. Какова вероятность того, что номер наудачу открытой страницы будет кратен 7?
2. В урне содержится 3 белых, 2 черных и 5 красных шаров. Из урны наудачу извлекается один шар. Какова вероятность того, что а) выбранный шар окажется красным? б) не будет черным?
3. В коробке содержится $\boldsymbol{N}$ изделий, среди которых $\boldsymbol{M}$ бракованных. Из урны извлекается $\boldsymbol{k}$ изделий. Какова вероятность, что среди них будет $\boldsymbol{l}$ бракованных?
4. Стадо из 20 голов (10 овец и 10 коз) делится пополам случайным образом. Какова вероятность того, что в каждой половине будет одинаковое число овец?
5. Из колоды в 52 карты извлекаются одна за другой две карты. Чему равна вероятность того, что первая карта туз, а вторая – валет? Что одна из этих карт туз, а другая – валет?
6. Из урны, содержащей 19 белых и 1 черный шар, вытаскивается 5 шаров. Какова вероятность того, что в урне остались только белые шары?
7. Из 10 урн, содержащих по 19 белых и 1 черному шару каждая, извлекается по одному шару. Какова вероятность, что хотя бы один шар черный?
8. Найти вероятность того, что сумма двух наудачу взятых чисел из отрезка $[-1,1]$ больше нуля, а произведение отрицательно.
9. Мячик диаметром 10 см. бросают в садовую решетку, сделанную из вертикальных прутьев толщиной в 4 см. Найти вероятность того, что мячик пролетит сквозь решетку, если расстояние между осями прутьев 40 см.
10. Петя, Маша и ещё n садятся в ряд. Какова вероятность того, что между Петей и Машей будет сидеть ровно r человек?
11. За круглым столом короля Артура сидят 12 рыцарей. Каждый из них враждует со своими соседями по столу. Какова вероятность выбрать 5 рыцарей для освобождения заколдованной принцессы так, чтобы среди выбранных не было врагов?