Комбинаторика

Задача 1. В группе 30 студентов. Необходимо выбрать старосту, заместителя старосты и профорга. Сколько существует способов это сделать?
Решение. Старостой может быть выбран любой из 30 студентов, заместителем - любой из оставшихся 29, а профоргом – любой из оставшихся 28 студентов, т.е. $n_1=30$, $n_2=29$, $n_3=28$. По правилу умножения общее число N способов выбора старосты, его заместителя и профорга равно $N=n_1\times n_2\times n_3=30\times 29\times 28=24360$.

Задача 2. Два почтальона должны разнести 10 писем по 10 адресам. Сколькими способами они могут распределить работу?
Решение. Первое письмо имеет $n_1=2$ альтернативы – либо его относит к адресату первый почтальон, либо второй. Для второго письма также есть $n_2=2$ альтернативы и т.д., т.е. $n_1=n_2=\ldots=n_{10}=2$. Следовательно, в силу правила умножения общее число способов распределений писем между двумя почтальонами равно

$$N = n_1 n_2 \ldots n_{10} = \underbrace{2\times 2\times\ldots\times 2}_{10\ \text{ðàç}} = 2^{10} = 1024.$$

Задача 3. В ящике 100 деталей, из них 30 – деталей 1-го сорта, 50 – 2-го, остальные – 3-го. Сколько существует способов извлечения из ящика одной детали 1-го или 2-го сорта?
Решение. Деталь 1-го сорта может быть извлечена $n_1=30$ способами, 2-го сорта – $n_2=50$ способами. По правилу суммы существует $N=n_1+n_2=30+50=80$ способов извлечения одной детали 1-го или 2-го сорта.

Задача 4. Порядок выступления 7 участников конкурса определяется жребием. Сколько различных вариантов жеребьевки при этом возможно?
Решение. Каждый вариант жеребьевки отличается только порядком участников конкурса, т.е. является перестановкой из 7 элементов. Их число равно

$$P_7 = 7! = 1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7 = 5040.$$

Задача 5. В конкурсе по 5 номинациям участвуют 10 кинофильмов. Сколько существует вариантов распределения призов, если по всем номинациям установлены **различные** премии?
Решение. Каждый из вариантов распределения призов представляет собой комбинацию 5 фильмов из 10, отличающуюся от других комбинаций, как составом, так и их порядком. Так как каждый фильм может получить призы как по одной, так и по нескольким номинациям, то одни и те же фильмы могут повторяться. Поэтому число таких комбинаций равно числу размещений с повторениями из 10 элементов по 5: $N = \overline{A}_{10}^{5} = 10^5 = 100000$.

Задача 6. В шахматном турнире участвуют 16 человек. Сколько партий должно быть сыграно в турнире, если между любыми двумя участниками должна быть сыграна одна партия?
Решение. Каждая партия играется двумя участниками из 16 и отличается от других только составом пар участников, т.е. представляет собой сочетания из 16 элементов по 2. Их число равно $C_{16}^{2} = \dfrac{16!}{14!2!} = \dfrac{15\times 16}{1\times 2} = 120$.

Задача *7.* В условиях задачи 6 определить, сколько существует вариантов распределения призов, если по всем номинациям установлены **одинаковые** призы?
Решение. Если по каждой номинации установлены одинаковые призы, то порядок фильмов в комбинации 5 призов значения не имеет, и число вариантов представляет собой число сочетаний с повторениями из 10 элементов по 5, определяемое по формуле

$$\overline{C}_{10}^{5} = C_{10+5-1}^{5} = C_{14}^{5} = \frac{10\times 11\times 12\times 13\times 14}{1\times 2\times 3\times 4\times 5} = 2002.$$

Задача 8. Садовник должен в течении трех дней посадить 6 деревьев. Сколькими способами он может распределить по дням работу, если будет сажать не менее одного дерева в день?
Решение. Предположим, что садовник сажает деревья в ряд, и может принимать различные решения относительно того, после какого по счету дерева остановиться в первый день и после какого – во второй. Таким образом, можно представить себе, что деревья разделены двумя перегородками, каждая из которых может стоять на одном из 5 мест (между деревьями). Перегородки должны стоять там по одной, поскольку иначе в какой-то день не будет посажено ни одного дерева. Таким образом, надо выбрать 2 элемента из 5 (без повторений). Следовательно, число способов $C_5^2 = 10$.

Задача 9. Сколько существует четырехзначных чисел (возможно, начинающихся с нуля), сумма цифр которых равна 5?
Решение. Представим число 5 в виде суммы последовательных единиц, разделенных на группы перегородками (каждая группа в сумме образует очередную цифру числа). Понятно, что таких перегородок понадобится 3. Мест для перегородок имеется 6 (до всех единиц, между ними и после). Каждое место может занимать одна или несколько перегородок (в последнем случае между ними нет единиц, и соответствующая сумма равна нулю). Рассмотрим эти места в качестве элементов множества. Таким образом, надо выбрать 3 элемента из 6 (с повторениями). Следовательно, искомое количество чисел $\overline{C}_6^3 = C_8^3 = \dfrac{8\times 7\times 6}{1\times 2\times 3} = 56.$

Задача 10. Сколькими способами можно разбить группу из 25 студентов на три подгруппы A, B и C по 6, 9 и 10 человек соответственно?
Решение. Здесь n=25, k=3, n_1=6, n_2=9, n_3=10. Согласно формуле, число таких разбиений равно $N_{25}(6,9,10) = \dfrac{25!}{6!9!10!}$.

Задача 11. Сколько существует семизначных чисел, состоящих из цифр 4, 5 и 6, в которых цифра 4 повторяется 3 раза, а цифры 5 и 6 – по 2 раза?
Решение. Каждое семизначное число отличается от другого порядком следования цифр, при этом фактически все семь мест в этом числе делятся на три группы: на одни места ставится цифра «4», на другие места – цифра «5», а на третьи места – цифра «6». Таким образом, множество состоит из 7 элементов (n=7), причем n_1=3, n_2=2, n_3=2, и, следовательно, количество таких чисел равно

$$N_7(3;2;2) = \frac{7!}{3!2!2!} = 210.$$

Классическая вероятностная модель. Геометрическая вероятность.

Задача *1*. В ящике 5 апельсинов и 4 яблока. Наудачу выбираются 3 фрукта. Какова вероятность, что все три фрукта – апельсины?
Решение. Элементарными исходами здесь являются наборы, включающие 3 фрукта. Поскольку порядок фруктов безразличен, будем считать их выбор неупорядоченным (и бесповторным). Общее число элементарных исходов $n = |\Omega|$ равно числу способов

выбрать 3 фрукта из 9, т.е. числу сочетаний C_9^3. Число благоприятствующих исходов $m = |A|$ равно числу способов выбора 3 апельсинов из имеющихся 5, т.е. C_5^3. Тогда искомая вероятность

$$P(A) = \frac{C_5^3}{C_9^3} = \frac{\frac{5!}{2!3!}}{\frac{9!}{3!6!}} = 0{,}12.$$

Задача 2. Преподаватель предлагает каждому из трех студентов задумать любое число от 1 до 10. Считая, что выбор каждым из студентов любого числа из заданных равновозможен, найти вероятность того, что у кого-то из них задуманные числа совпадут.

Решение. Вначале подсчитаем общее количество исходов. Первый из студентов выбирает одно из 10 чисел и имеет n_1=10 возможностей, второй тоже имеет n_2=10 возможностей, наконец, третий также имеет n_3=10 возможностей. В силу правила умножения общее число способов равно: $n= n_1 \times n_2 \times n_3 = 10^3 = 1000$, т.е. все пространство содержит 1000 элементарных исходов. Для вычисления вероятности события А удобно перейти к противоположному событию, т.е. подсчитать количество тех случаев, когда все три студента задумывают разные числа. Первый из них по-прежнему имеет m_1=10 способов выбора числа. Второй студент имеет теперь лишь m_2=9 возможностей, поскольку ему приходится заботиться о том, чтобы его число не совпало с задуманным числом первого студента. Третий студент еще более ограничен в выборе — у него всего m_3=8 возможностей. Поэтому общее число комбинаций задуманных чисел, в которых нет совпадений, равно $m=10\cdot 9\cdot 8=720$. Случаев, в которых есть совпадения, остается 280. Следовательно, искомая вероятность равна P=280/1000= 0,28.

Задача 3. Найти вероятность того, что в 8-значном числе ровно 4 цифры совпадают, а остальные различны.

Решение. Событие А={восьмизначное число содержит 4 одинаковые цифры}. Из условия задачи следует, что в числе пять различных цифр, одна из них повторяется. Число способов её выбора равно числу способов выбора одной цифры из 10 цифр. Эта цифра занимает любые 4 места в числе, что возможно сделать C_8^4 способами, так как порядок здесь не важен. Оставшиеся 4 места занимают различные цифры из неиспользованных девяти, и так как число зависит от порядка расположения цифр, то число способов выбора четырех цифр равно числу размещений A_9^4. Тогда число благоприятствующих исходов $|A| = 10 C_8^4 A_9^4$. Всего же способов составления 8-значных чисел равно $|\Omega|=10^8$. Искомая вероятность равна

$$P = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10 C_8^4 A_9^4}{10^8} = \frac{8!}{4!4!} \cdot \frac{9!}{5!} \cdot \frac{1}{10^7} = 0{,}021168.$$

Задача 4. Шесть клиентов случайным образом обращаются в 5 фирм. Найти вероятность того, что хотя бы в одну фирму никто не обратится.

Решение. Рассмотрим противоположное событие $\overline{A}$, состоящее в том, что в каждую из 5 фирм обратился клиент, тогда в какую-то из них обратились 2 клиента, а в остальные 4 фирмы – по одному клиенту. Таких возможностей $|\overline{A}| = 5 \times N_6(2,1,1,1,1) = \frac{5 \cdot 6!}{1!1!1!1!2!}$. Общее количество способов распределить 6 клиентов по 5 фирмам $|\Omega| = 5^6$. Отсюда $P(\overline{A}) = \frac{5 \cdot 6!}{1!1!1!1!2!} \cdot \frac{1}{5^6} = 0{,}1152$. Следовательно, $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0{,}8848$.

Задача 5. Пусть в урне имеется N шаров, из них M белых и N–M черных. Из урны извлекается n шаров. Найти вероятность того, что среди них окажется ровно m белых шаров.
Решение. Так как порядок элементов здесь несущественен, то число всех возможных наборов объема n из N элементов равно числу сочетаний C_N^n. Число испытаний, которые благоприятствуют событию A – "m белых шаров, n–m черных", равно $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$, и, следовательно, искомая вероятность равна P(A)=$\dfrac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$.

Задача 6. Точку наудачу бросили на отрезок [0; 2]. Какова вероятность ее попадания в отрезок [0,5; 1,4]?
Решение. Здесь пространство элементарных исходов весь отрезок $\Omega = [0; 2]$, а множество благоприятствующих исходов $A = [0{,}5; 1{,}4]$, при этом длины этих отрезков равны $l(\Omega) = 2$ и $l(A) = 0{,}9$ соответственно. Поэтому

$$P(A) = \frac{l(A)}{l(\Omega)} = \frac{0{,}9}{2} = 0{,}45.$$

Задача 7 (задача о встрече). Два лица A и B условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами. Пришедший первым ждет другого в течении 20 минут, после чего уходит. Чему равна вероятность встречи лиц A и B, если приход каждого из них может произойти наудачу в течении указанного часа и моменты прихода независимы?
Решение. Обозначим момент прихода лица A через x и лица B – через y. Для того, чтобы встреча произошла, необходимо и достаточно, чтобы $|x-y| \le 20$. Изобразим x и y как координаты на плоскости, в качестве единицы масштаба выберем минуту. Всевозможные исходы представляются точками квадрата со стороной 60, а благоприятствующие встрече располагаются в заштрихованной области. Искомая вероятность равна отношению площади заштрихованной фигуры (рис. 2.1) к площади всего квадрата: P(A) = $(60^2 - 40^2)/60^2 = 5/9$.

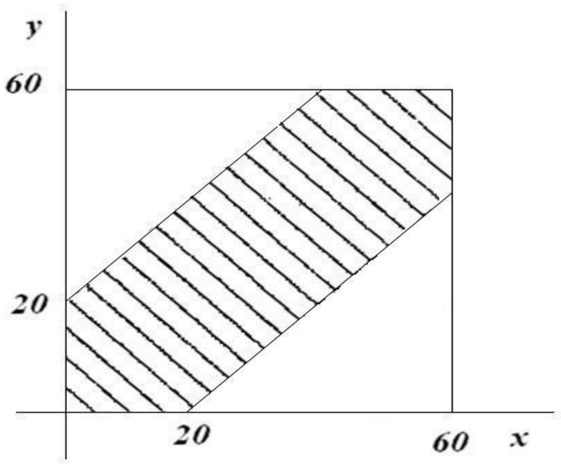

Рис. 2.1.