

## Виды и методы решения текстовых задач

Математические задачи, в которых есть хотя бы один объект, являющийся реальным предметом, принято называть текстовыми (сюжетными, практическими, арифметическими и т.д.). Перечисленные названия берут начало от способа записи (задача представлена в виде текста), сюжета (описываются реальные объекты, явления, события), характера математических выкладок (устанавливаются количественные отношения между значениями некоторых величин, связанные чаще всего с вычислениями). В последнее время наиболее распространенным является термин «текстовая задача».

Текстовой задачей, как правило, называется описание некоторой ситуации (явления, процесса) на естественном и (или) математическом языке с требованием, либо дать количественную характеристику какого-то компонента этой ситуации (определить числовое значение некоторой величины по известным числовым значениям других величин и зависимостям между ними), либо установить наличие или отсутствие некоторого отношения между ее компонентами или определить вид этого отношения, либо найти последовательность требуемых действий.

Придерживаясь современной терминологии, можно сказать, что текстовая задача представляет собой словесную модель ситуации, явления, события, процесса и т.п. Как в любой модели, в текстовой задаче описываются не все события или явления, а лишь его количественные и функциональные характеристики. Основная особенность текстовых задач состоит в том, что в них не указывается прямо, какое именно действие (или действия) должно быть выполнено для получения ответа на требование задачи.

Множество задач, в которых имеется одинаковая зависимость между величинами, входящими в эти задачи, при возможном различии их числовых данных и фабул образуют определенный вид задач. Задачи одного вида имеют одну и ту же алгебраическую модель. Положив в основание классификации способы решения задач, можно выделить такие виды текстовых задач:

- 1) задачи на нахождение неизвестных по результатам действий;
- 2) задачи на пропорциональное деление;
- 3) задачи на исключение одного из неизвестных;
- 4) задачи на среднее арифметическое;
- 5) задачи на проценты и части;
- 6) задачи на движение;
- 7) задачи, решаемые с конца, или «обратным ходом» и т.д.

Существуют различные методы решения текстовых задач: арифметический, алгебраический, геометрический, логический, практический и др. В основе каждого метода лежат различные виды математических моделей. Например, при алгебраическом методе решения задачи составляются уравнения или неравенства, при геометрическом – строятся диаграммы или графики. Решение задачи логическим методом начинается с составления алгоритма.

Следует иметь в виду, что практически каждая задача в рамках выбранного метода допускает решение с помощью различных моделей. Так, используя алгебраический метод, ответ на требование одной и той же задачи можно получить, составив и решив совершенно разные уравнения, используя логический метод – построив разные алгоритмы. Ясно, что и в этих случаях мы также имеем дело с различными методами решения конкретной задачи, которые (с целью избежать разночтения и неоднозначность трактовки термина «метод решения») будем называть способами решения.

*Арифметический метод.* Решить задачу арифметическим методом – это значит найти ответ на требование задачи посредством выполнения арифметических действий над числами. Одну и ту же задачу во многих случаях можно решить различными арифметическими способами. Задача считается решенной различными способами, если ее решения отличаются связями между данными и искомыми, положенными в основу решений, или последовательностью использования этих связей.

*Алгебраический метод.* Решить задачу алгебраическим методом – это значит найти ответ на требование задачи, составив и решив уравнение или систему уравнений (или неравенств). Одну и ту же задачу можно также решить различными алгебраическими способами. Задача считается решенной различными способами, если для ее решения составлены различные уравнения или системы уравнений (неравенств), в основе составления которых лежат различные соотношения между данными и искомыми.

*Геометрический метод.* Решить задачу геометрическим методом – значит найти ответ на требование задачи, используя геометрические построения или свойства геометрических фигур.

Одну и ту же задачу можно также решить различными геометрическими способами. Задача считается решенной различными способами, если для ее решения используются различные построения или свойства фигур. Рассмотрим пример решения текстовой задачи различными способами.

**Задача.** Из двух городов  $A$  и  $B$ , расстояние между которыми  $250$  км, навстречу друг другу выехали два туриста. Скорость движения первого равна  $20$  км/ч, второго –  $30$  км/ч. Через сколько часов туристы встретятся?

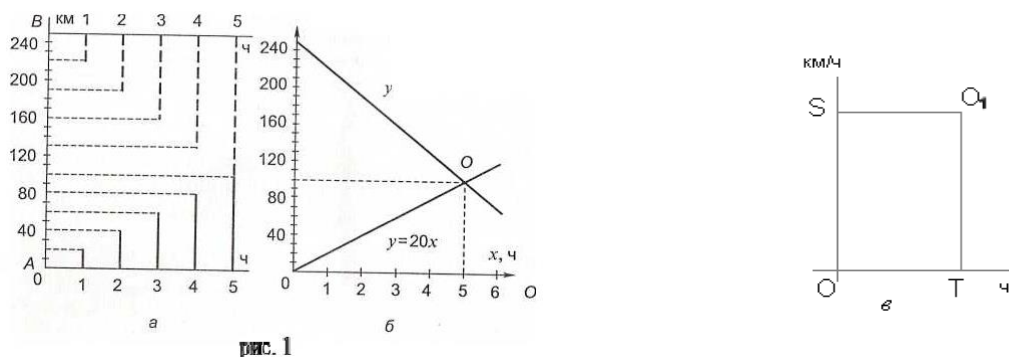
**Решение: 1-й способ.** Математическую модель задачи представим в виде диаграммы. Примем длину одного отрезка по вертикали за  $10$  км, а длину одного отрезка по горизонтали – за  $1$  ч. Отложим на вертикальной прямой отрезок  $AB$ , равный  $250$  км. Он будет изображать расстояние между городами. Для удобства проведем еще одну ось времени через точку  $B$ . Затем на вертикальных прямых станем откладывать отрезки пути, пройденные каждым туристом за  $1$  ч,  $2$  ч,  $3$  ч и т.д. (рис. 1, а). Из чертежа видим, что через  $5$  ч они встретятся.

**2-й способ.** В прямоугольной системе координат по горизонтали отложим время движения (в часах), по вертикали – расстояние (в километрах).

Примем длину одного отрезка по вертикали за  $10$  км, а длину одного отрезка по горизонтали – за  $1$  ч. Построим графики, характеризующие движение каждого туриста. Движение первого туриста определяется функцией  $y=20x$ , второго –  $y = 250 - 30x$ . Абсцисса точки их пересечения (точки  $O$ ) указывает, через сколько часов туристы встретятся (рис. 1, б). Из чертежа видно, что ее значение равно  $5$ . Ордината указывает, на каком расстоянии от пункта  $A$  произойдет встреча. Ее значение равно  $100$ .

**3-й способ.** Пусть время движения туристов до встречи изображается отрезком  $OT$ , а скорость сближения – отрезком  $OS$  (рис. 1, в). Тогда площадь  $S$  прямоугольника  $OSO_1T$  (она равна  $OS \cdot OT$ ) соответствует расстоянию между городами  $A$  и  $B$  (пройденный путь есть произведение скорости движения на время движения). Учитывая, что туристы сближаются каждый час на  $20 + 30 = 50$  (км), расстояние между городами равно  $250$  км, имеем уравнение  $250 = 50 OT$ , решив которое находим  $OT = 5$  (ч). Итак, туристы встретятся через  $5$  ч.

Ответ: через  $5$  ч.



**Логический метод.** Решить задачу логическим методом – это значит найти ответ на требование задачи, как правило, не выполняя вычислений, а только используя логические рассуждения. Примерами таких задач могут

служить задачи «на переправы», классическим представителем которых является задача «о волке, козе и капусте», или задачи «на взвешивание».

*Практический метод.* Решить задачу практическим методом – значит найти ответ на требование задачи, выполнив практические действия с предметами или их копиями (моделями, макетами и т.п.).

Иногда в ходе решения задачи применяются несколько методов: алгебраический и арифметический; геометрический, алгебраический и арифметический; арифметический и практический и т.п. В этом случае считают, что задача решается *комбинированным (смешанным) методом*. Методы решения могут быть разными, но способ решения, лежащий в их основе, может быть один.

*Этапы решения текстовых задач.*

Деятельность по решению задачи включает следующие этапы независимо от выбранного метода решения:

1. Анализ содержания задачи.
2. Поиск пути решения задачи и составление плана ее решения.
3. Осуществление плана решения задачи.
4. Проверка решения задачи.

В реальном процессе решения задачи названные этапы не имеют четких границ, и человек, решающий задачу, не всегда выделяет их в явном виде, переходя от одного к другому незаметно для себя. Вместе с тем решение каждой отдельно взятой задачи обязательно должно содержать все указанные этапы, осмысленное прохождение которых (вместе со знанием приемов их выполнения) делает процесс решения любой задачи осознанным и целенаправленным, а значит, более успешным. Игнорирование одних этапов (например, поиска пути решения) может привести к решению методом «проб и ошибок», игнорирование других (например, проверки решения задачи) – к получению неверного ответа и т.д.

Рассмотрим более подробно каждый этап решения задачи.

*1. Анализ задачи.* Основное назначение этапа – осмыслить ситуацию, отраженную в задаче; выделить условия и требования, назвать данные и искомые, выделить величины и зависимости между ними (явные и неявные). На этом этапе решения задачи можно использовать такие приемы:

- а) представление той жизненной ситуации, которая описана в задаче;
- б) постановка специальных вопросов и поиск ответов на них;
- в) «переформулировка» задачи;
- г) моделирование ситуации, описанной в задаче, с помощью реальных

предметов, предметных или графических моделей и др.

Первый прием – представление той жизненной ситуации, которая описана в задаче, – выполняется фактически при чтении текста задачи. Вместе с тем мысленное воспроизведение всех объектов задачи и связей между ними может проводиться и позже. Цель такого воспроизведения – выявление основных количественных и качественных характеристик ситуации, представленной в задаче.

Второй прием – постановка специальных вопросов и поиск ответов на них – включает следующий «стандартный» набор вопросов, ответы на которые позволяют детально разобраться в содержании задачи:

1. О чем говорится в задаче?
2. Что известно в задаче?
3. Что требуется найти в задаче?
4. Что в задаче неизвестно? и др.

Третий прием – переформулировка текста задачи – состоит в замене данного в задаче описания некоторой ситуации другим описанием, сохраняющим все отношения, связи, качественные характеристики, но более явно их выражающим. Вся лишняя, несущественная информация при этом отбрасывается, текст задачи преобразуется в форму, облегчающую поиск пути решения. В ходе переформулировки выделяются основные ситуации, о которых идет речь в задаче, при необходимости строится вспомогательная модель задачи: краткая запись условия, таблица, рисунок, чертеж, диаграмма и т.п.

Моделирование ситуации, описанной в задаче, с помощью реальных предметов, предметных моделей или графических моделей является еще одним, четвертым, приемом анализа задачи.

Вспомогательные модели являются действенным средством поиска пути решения задачи и составления плана ее решения.

*2. Поиск пути решения задачи и составление плана ее решения.*  
Назначение этапа – завершить установление связей между данными и искомыми величинами и указать последовательность использования этих связей.

Проведя анализ задачи, не всегда просто найти путь к ее решению. Поиск пути решения задачи является довольно трудным процессом, для которого нет точного предписания. Укажем некоторые приемы, помогающие осуществлять этот этап.

Одним из приемов поиска пути решения задачи является анализ задачи по тексту или по ее вспомогательной модели. Поиск пути решения задачи можно осуществлять от вопроса задачи к данным (аналитический путь) или от данных к вопросу (синтетический путь).

В первом случае (аналитический путь) необходимо уточнить, что требуется найти в задаче и определить, что достаточно знать для ответа на этот вопрос. Для этого следует выяснить, какие из нужных данных есть в условии задачи. Если они (или одно из них) отсутствуют, надо определить, что нужно знать, чтобы найти недостающие данные (или одно недостающее данное) и т.д., пока для определения очередного неизвестного оба данных будут известны.

Во втором случае (синтетический путь) решающий выделяет в тексте задачи два каких-либо данных и на основе связи между ними, установленной при анализе, определяет, какое неизвестное может быть найдено по этим данным и с помощью какого действия. Затем, считая полученное число данным, решающий опять выделяет два взаимосвязанных данных и определяет, какое неизвестное может быть найдено по ним и с помощью какого действия и т.д., пока выполнение очередного действия не приведет к определению искомого.

Анализ и синтез в рассуждениях, как правило, переплетаются. Осуществляя поиск пути решения задачи синтетически, анализ часто производят «про себя». В то же время, каким бы приемом мы ни вели поиск пути решения составной задачи, ее предварительный анализ (хотя бы подсознательный) неизбежен.

Еще одним из приемов поиска пути решения задачи является разбиение задачи на смысловые части. Сущность этой работы заключается в том, чтобы научиться различать в данной задаче отдельные, менее сложные задачи, последовательное решение которых позволяет получить ответ на требование данной.

*3. Осуществление плана решения задачи.* Назначение этапа – найти ответ на требование задачи. Немаловажную роль при решении задач играет запись найденного решения. Прежде всего, остановимся на используемых сокращениях при записи действий с именованными числами. При записи именованных чисел, выраженных в метрических мерах, используются наименования, принятые в международной системе единиц СИ, например, «м» – метр, «км/ч» – километров в час. Названия таких мер, как квадратный метр, кубический метр, записываются «м<sup>2</sup>», «м<sup>3</sup>». Вес названия метрических мер, употребляемых без чисел, выписываются полностью словами, например: «сколько гектаров земли...», а не «сколько га земли...». Принято названия метрических мер выписывать полностью и в случае буквенной символики, например, «*a* литров», «*b* метров» и т.д. Однако часто этого не делают, а используют более удобную запись «*x* км/ч», «*y* м<sup>3</sup>» и т.д. Что касается других наименований, то здесь нет общеустановленных условных обозначений.

Рассмотрим пример задачи, решаемой геометрическим методом.

Осуществление плана решения задачи выполняется письменно. Обычно в этом случае описывают и выполняют построение графика или диаграммы. Затем ответы на требование задачи считываются с чертежа (если используется конструктивный прием) или находятся в результате аналитического решения задачи (если используется графико-вычислительный прием).

**Задача.** Имеются два сплава золота и серебра; в одном количество этих металлов находится в отношении 2:3, в другом – в отношении 3:7. Сколько нужно взять каждого сплава, чтобы получить 8 кг нового сплава, в котором золото и серебро были бы в отношении 5:11?

**Решение:** Математическую модель задачи представим в виде диаграммы (рис. 2). По горизонтали будем откладывать массу сплава (в килограммах), по вертикали – число долей серебра в сплаве.

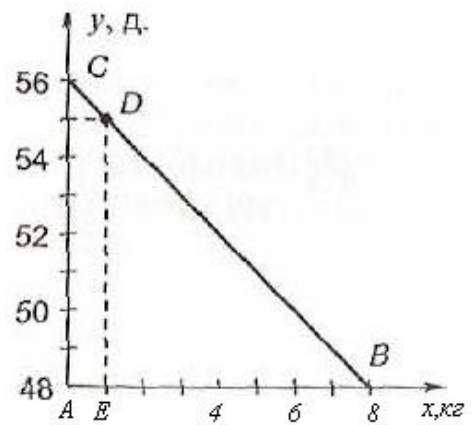


рис. 2

Рассмотрим вначале доли какого-либо одного металла в сплаве, например доли серебра. Серебро составляет  $3/5$  первого сплава,  $7/10$  второго и  $11/16$  искомого. Общий знаменатель этих дробей – 80, следовательно, на каждые 80 частей в первом сплаве приходится 48 частей серебра, во втором – 56 частей, в искомом – 55 частей.

Проведем горизонтальный отрезок  $AB$ , изображающий 8 кг (массу искомого сплава). По вертикали для уменьшения размера чертежа наносим на луче  $AC$  деления, начиная не с нуля, а с 48 (48 — наименьшее число долей серебра в сплавах). Соединяем прямолинейным отрезком точки  $B$  (8кг) и  $C$  (56 долей серебра) и проводим через точку с отметкой 55 горизонтальную прямую до пересечения с  $BC$  в точке  $D$ , а через  $D$  — вертикальную прямую до пересечения с  $AB$  в точке  $E$ . Отрезки  $AE$  и  $EB$  указывают ответ: надо взять 1 кг первого сплава (отрезок  $AE$ ) и 7 кг второго сплава (отрезок  $EB$ ).

Ответ: 1 кг; 7кг.

4. *Проверка решения задачи.* Назначение этапа — установить, правильно ли понята задача, и выяснить, не противоречит ли полученный ответ всем другим условиям задачи. Этот этап является обязательным при решении задач. Следует помнить, что логичные рассуждения на других этапах решения задачи не гарантируют правильности ее решения.

Проверку решения задачи можно проводить различными способами. Перечислим их:

I. Установление соответствия между числами, полученными в результате решения задачи и данными в условии задачи.

II. Составление и решение задачи, обратной данной.

III. Решение задачи различными способами.

IV. Решение задачи различными методами.

V. Прикидка (грубая проверка).

Особенностью текстовых задач является то, что эти задачи присутствуют во всех изучаемых темах в курсе математики и алгебры в средних классах, отличительной чертой являются лишь их методы решения.

Решение текстовой задачи по методам решения разделяется на 2 условных этапа:

I этап: 5-6 классы задачи решаются арифметическим, геометрическим, логическим методами, практический;

II этап: 7-9 классы задачи решаются выше перечисленными методами, основным является алгебраический метод.

В результате решения текстовой задачи формируются такие умения, как решение задачи различными методами, измерение геометрических величин, моделирование математических ситуаций, умение решать подбором, логически рассуждать, распознавать в задачах жизненные ситуации и решать их, умение анализировать, умение находить поиск путей решения, оформлять рисунки, чертежи и условия задачи, а так же вырабатывается умение абстрактно представлять; вырабатывается навык решения элементарных задач, навык четкой формулировки выводов на основе наблюдения, развивается логическое мышление.

#### **Вопросы и задания:**

1. Назовите и охарактеризуйте виды текстовых задач. Приведите примеры задач разных видов.

2. Какие основные методы решения текстовых задач вы знаете? Дайте краткую характеристику каждого метода.

3. Раскройте содержание этапов решения текстовых задач.

4. Как организовать работу учителя по формированию умения анализировать условие задачи?

5. Как можно реализовать межпредметные связи при решении текстовых задач в школьном курсе математики?

6. Составьте текстовые задачи с этническим содержанием и раскройте методику их решения.

7. Выберите любую текстовую задачу и разработайте поэтапную методику ее



решения.

8. Составьте предписание для учащихся при решении текстовых задач с помощью составления уравнений.