Методика изучения показательной и логарифмической функции

Основная цель изучения – привести в систему и обобщить сведения о степени, ознакомить с показательной, логарифмической и степенной функциями и их свойствами; научить решать несложные показательные и логарифмические уравнения, неравенства и их системы. Одной из важнейших задач курса математики старших классов является развитие и в некотором смысле завершение всех основных линий, составляющих основу школьного математического образования, в том числе систематизация и углубление знаний о функции. В этом аспекте и следует рассматривать изучение показательной и логарифмической функций в 10-11 классе.

Пропедевтическое изучение показательной функции

В учебниках А.Г. Мордковича; М.И. Башмакова авторы нашли возможность опережающего рассмотрения некоторых вопросов на наглядно-интуитивном уровне.

В учебнике М.И. Башмакова (9-й класс) в связи с потребностью вычисления степеней возникает проблема возведения числа 2 в степень $\sqrt{2}$. Выписывая несколько десятичных приближений числа $2^{\sqrt{2}}$, можно проследить за изменением степени с изменением значений числа $\sqrt{2}$, т.е. получить новую функцию $y = 2^x$. Она является частным случаем функции $y = a^x$, которая называется показательной, на рисунке изображается готовый график функции $y = 2^x$ наряду с графиками $y = x^2$ *и* $y = x^3$ для сравнения их скорости роста на бесконечности.

В учебнике А.Г. Мордковича (9-й класс) впервые учащиеся встречаются с показательной функцией натурального аргумента при изучении формулы n-го члена геометрической прогрессии. Эта взаимосвязь позволила автору еще иначе определить геометрическую прогрессию как показательную функцию, заданную на множестве натуральных чисел. Предлагаются графики функций $y = 2^x, y = 0{,}5^x$ при $x \in N$, состоящие из изолированных точек, лежащих на некоторой кривой, которая называется экспонентой (*exponentis* – показывающий). Приводятся примеры использования показательной зависимости для моделирования реальных процессов: размножения колонии живых организмов, радиоактивного распада, охлаждения тела в окружающей среде, изменения суммы вклада в банке.

В методической литературе можно выделить следующие подходы к введению **показательной функции**:

1 подход: В этом варианте изложения, внимание учащихся обращается на то, что функция может быть задана перечислением характеристических свойств (аксиоматическое определение).

1) Показательной функцией с основанием а называется функция, определенная на R и обладающая следующими свойствами:

1) $a>0,\ a\neq 1$
2) a^x *возрастает при* $a>1$ *и убывает при* $0<a<1$;
3) $a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$

При этом подходе целесообразно рассмотреть перед введением показательной функции практические задачи (Например, для описания процессов органического роста необходима функция.)

2) Другой основан на понятиях и утверждениях математического анализа: решении дифференциальных уравнений и теории степенных рядов.

Приведем одно из определений: «Функция, определенная на множестве действительных чисел, называется показательной, если она является решением уравнения $y' = ky\ (k \neq 0)$ *и удовлетворяет начальному условию* $y(0) = 1$ *». Это определение является аксиоматическим (объект задан перечислением трех свойств), а поэтому необходима теорема существования и единственности функции.*

3) Вначале определяется логарифмическая функция равенством: $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ *, затем функция* $y = e^x$ *как функция обратная* $y = \ln x$ *и, наконец, показательная:* $a^x = e^{x\ln a}$ *. При таком варианте прослеживается совместное изучение этих функций.*

2 подход реализован в действующих школьных учебниках.

Введение показательной функции связывают с обобщением понятия степени до степени с вещественным показателем.

В учебниках Ш. А. Алимова и др. (10-й класс), Г. В. Дорофеева и др. (11-й класс), М. И. Башмакова (10 класс), которое достигается за счет предварительного введения понятия степени с действительным показателем. В учебниках А.Н. Колмогорова и др. (11-й класс); А.Г. Мордковича (11-й класс), М.И. Башмакова (10-й класс) принят поэтапный способ изучения: сначала рассматриваются графики и свойства двух ее частных случаев ($y = 2^x, y = 0{,}5^x$) на множестве рациональных чисел; затем эти функции доопределяются в иррациональных точках оси абсцисс с помощью рассуждений по выяснению понятия о степени с иррациональным показателем смысла выражений на интуитивном уровне и получаются непрерывные кривые – графики функций с ранее перечисленными свойствами; наконец определяется показательная функция на множестве действительных чисел.

Заметим, что в учебнике 10-го класса М.И. Башмакова в разделе «Заключительная беседа» приводится аксиоматическое определение функции: «Показательная функция $y = f(x)$– это строго монотонная функция, определенная на всей числовой оси и удовлетворяющая функциональному уравнению $f(x_1) \cdot f(x_2) = f(x_1 + x_2)$».

3 подход. К определению показательной функции акцентируется внимание учащихся на понятии функции как математической модели различных явлений.

При этом подходе целесообразно рассмотреть перед введением показательной функции практические задачи.

Скорость роста линейной функции постоянна, квадратичной – линейна и вообще скорость роста (производная) степенной функции, являясь линейной степенью, растет медленнее, чем сама функция. Скорость же роста показательной функции пропорциональна самой функции. Необходимость изучения таких функций возникла с обнаружением таких законов естествознания как: законы разложения, законы радиоактивного излучения, законы движения в тормозящей среде и т.д.

В дальнейшем будем придерживаться традиционного определения показательной функции, как функции, заданной формулой

$$y = a^x, \text{где } a > 0, a \neq 1$$

В определении указывается, что основание a – положительное число. Объясняется это тем, что степень с рациональным (действительным) показателем определяется только для положительных оснований и математики предпочитают изучать функции, определенные на сплошных промежутках. Если попытаться все же построить график функции $y = (-2)^x$, то целочисленные точки будут располагаться бессистемно на координатной плоскости в верхней и нижней полуплоскостях, не намечая никакой кривой. При $a = 0$ будем иметь функцию $y = 0^x$ (т. е. $y = 0$), определенную при $x > 0$; при $a = 1$ будем иметь функцию $y = 1^x$ (т. е. $y = 1$), определенную на R – обе функции не представляют особого интереса. Поэтому показательная функция будет рассматриваться на двух промежутках: $0 < a < 1$ и $1 < < a < +\infty$, которые и следуют из определения. На практике очень редко встречаются процессы, описываемые этой функцией при $a < 0$.

Целесообразно изучение показательной функции начать с задач, подводящих к необходимости рассмотрения новой функции. Среди них могут быть задачи, решаемые с помощью геометрической прогрессии, которые послужат повторению изученной темы, а также установлению перспективных связей между этими понятиями.

Задача 1. Масса колонии бактерий, помещенных в питательную среду, равна 1 г. Каждый час она увеличивается вдвое. Какова будет ее масса через 1, 2, 3, 10, n ч после начала наблюдения? Вычислите массу колонии через то же время до начала наблюдения (время будем считать отрицательным). Результат оформите в виде таблицы.

В процессе решения задачи надо уяснить, что в начале наблюдения (т.е. при $t = 0$) масса колонии бактерий равнялась 1г, а затем она удваивалась через каждый час ($t = 1,2,3,\ldots$). Фиксируя массу ежечасно, получаем геометрическую прогрессию: $2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots, 2^n$ с первым членом $b_1=2$ и знаменателем $q=2$; n-й член прогрессии $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, т.е. $b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$. Пользуясь формулой, можно заполнить таблицу при $t>0$, а затем при $t<0$ (без обращения к геометрической прогрессии):

До начала наблюдения						В ходе наблюдения						
…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	10	20	n
	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	1024	1048576	2^n

Задача 2. Период полураспада одного из изотопов радона составляет пять дней. Имеется 1г этого вещества. Сколько нераспавшегося вещества останется через одну, две, три, четыре пятидневки, через месяц (30 дней), через n пятидневок? Вычислить массу вещества за те же промежутки времени до начала наблюдения (время отрицательное). Результат представить таблицей.

Проводя аналогичные рассуждения, получим геометрическую прогрессию: $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \dots, \frac{1}{2^n}$ с первым членом $b_1 = \frac{1}{2}$, знаменателем $q = \frac{1}{2}$, и n-м членом $b_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, где n означает число пятидневок. Таблица может иметь вид:

До начала наблюдения						В ходе наблюдения					
…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	6	n
	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Выявленная зависимость может быть записана формулой $m=\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Здесь же можно сообщить учащимся, что количество нераспавшегося вещества можно узнать по этой формуле и при дробных показателях, например, через 2,5 суток.

Проведенные задачи должны навести учащихся на мысль о желании рассмотреть функции $y=2^x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ и послужить отправным пунктом для постановки проблемы изучения показательной функции $y=a^x$. Кроме того составленные таблицы могут быть использованы для построения графиков этих функций и выяснения их свойств.

Важно, чтобы после этой работы учащиеся осознали основные свойства функции и иллюстрировали их на выполненном графике, четко представляли себе без зрительной опоры схематический график для a>1 и 0<a<1 и могли бы читать свойства при конкретных значениях a.

Основные свойства показательной функции и особенности поведения графиков можно представить в виде таблицы.

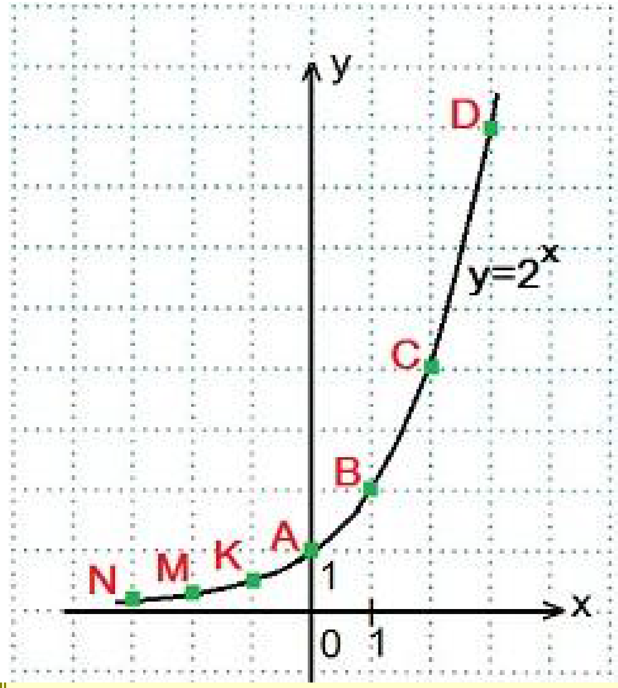
$y=a^x$		
№ п/п	$a>1$	$0<a<1$
1	$D(y)=R$	
2	$E(y)=(0;+\infty)$	
3	Возрастает	Убывает
4	$a^x>0$	
5	Непрерывна	
6	Не является ни четной, ни нечетной	
7	График расположен выше оси абсцисс и проходит через точки (0;1), (1,a); отсутствует симметрия графика; ось абсцисс является асимптотой графика; график непрерывная кривая-экспонента	
8	Графики функций $y=a^x$ и $y=a^{-x}$ симметричны относительно оси ординат	

Справедливы все свойства степенной функции:

- $a^0=1$ Любое число (кроме нуля) в нулевой степени равно единице.
- $a^1=a$ Любое число в первой степени равно самому себе.
- $a^x \cdot a^y=a^{x+y}$ При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а показатели складывают.
- $a^x:a^y=a^{x-y}$ При делении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя.
- $(a^x)^y=a^{xy}$ При возведении степени в степень основание оставляют прежним, а показатели перемножают
- $(a \cdot b)^x=a^x \cdot b^y$ При возведении произведения в степень возводят в эту степень каждый из множителей.
- $(a/b)^x=a^x/b^y$ При возведении дроби в степень возводят в эту степень и числитель и знаменатель дроби.
- $a^{-x}=1/a^x$
- $(a/b)^{-x}=(b/a)^x$.

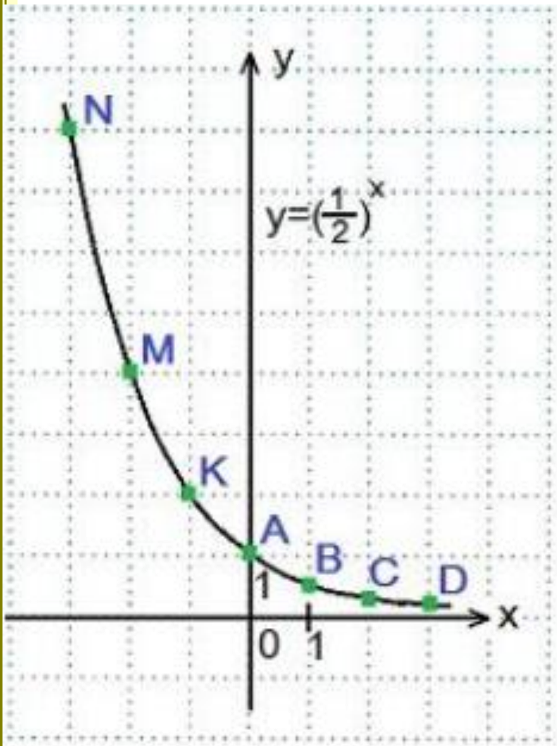
График показательной функции.

1) Построить график функции $y=2^x$. Найдем значения функции при $x=0$, $x=\pm1$, $x=\pm2$, $x=\pm3$ и построим график по точкам:



Большему значению аргумента **x** соответствует и большее значение функции **y**. Функция **y=2^x возрастает** на всей области определения **D (y)=R**, так как основание функции **2>1.**

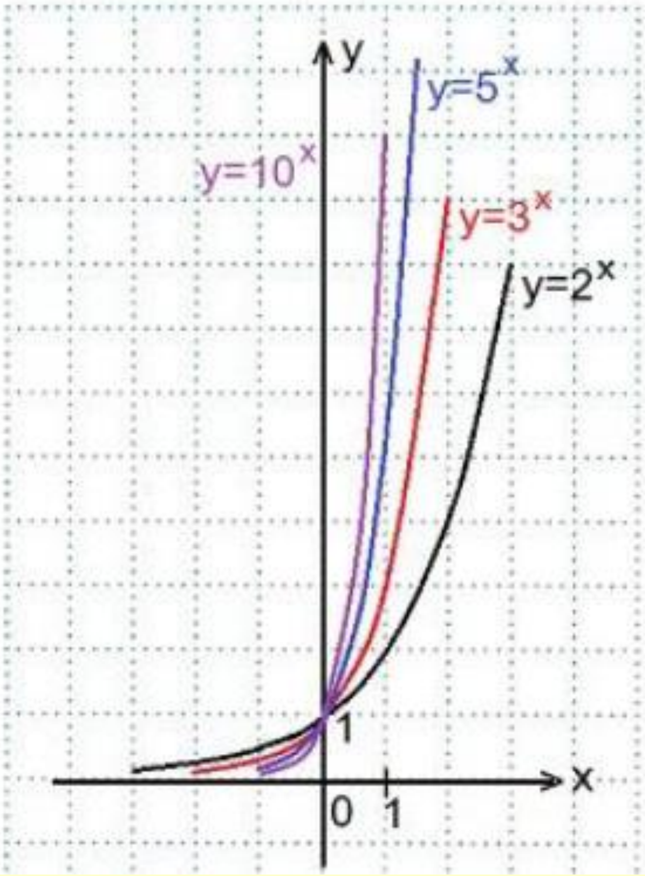
2) Построить график функции y=($^1/_2$)^x. Найдем значения функции при x=0, x=±1, x=±2, x=±3.



Большему значению аргумента **x** соответствует меньшее значение функции **y**. Функция **y=($^1/_2$)^x** убывает на всей своей области определения: **D (y)=R**, так как основание функции **0<($^1/_2$)<1**.

3) В одной координатной плоскости построить графики функций:

$y=2^x$, **$y=3^x$**, **$y=5^x$**, **$y=10^x$**. График функции **$y=2^x$** мы уже строили, графики остальных функций строим аналогично, причем, достаточно будет найти значения функций при **$x=0$** и при **$x=\pm1$**.



Переменная **x** может принимать любое значение (**D (y)=R**), при этом значение **y** всегда будет больше нуля (**E (y)=R₊**).

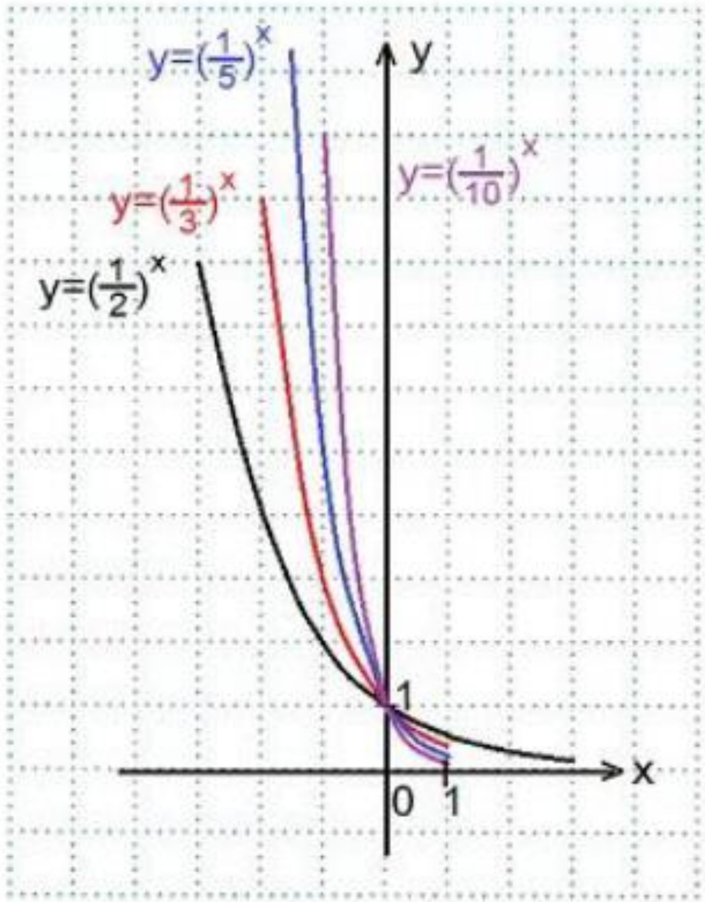
Графики всех данных функций пересекают ось Oy в точке (0; 1), так как любое число в нулевой степени равно единице; с осью Ox графики не пересекаются, так как положительное число в любой степени не может быть равным нулю. Чем больше основание **a** (если $a>1$) показательной функции $y=a^x$, тем ближе расположена кривая к оси Oy.

Все данные функции являются возрастающими, так как большему значению аргумента соответствует и большее значение функции.

4) В одной координатной плоскости построить графики функций:

$y=(^1/_2)^x$, $y=(^1/_3)^x$, $y=(^1/_5)^x$, $y=(^1/_{10})^x$.

Смотрите построение графика функции $y=(^1/_2)^x$ выше, графики остальных функций строим аналогично, вычислив их значения при $x=0$ и при $x=\pm1$.



Переменная **x** может принимать любое значение: **D (y)=R**, при этом область значений функции**: E (y)=R**₊.

Графики всех данных функций пересекают ось Oy в точке (0; 1), так как любое число в нулевой степени равно единице; с осью Ox графики не пересекаются, так как положительное число в любой степени не может быть равным нулю.

Чем меньше основание **а** (при $0<a<1$) показательной функции $y=a^x$, тем ближе расположена кривая к оси Оу.

Все эти функции являются убывающими, так как большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Логарифмическая функция

Краткий обзор взаимосвязи двух понятий – степени и логарифма уже предопределяет существующую связь между логарифмической и показательной функциями с одним и тем же основанием. Эти две функции – классический пример взаимно обратных функций, что дает возможность в методическом плане выбирать порядок их изучения в школе. Возможен вариант изучения свойств логарифмической функции как функции, обратной показательной. Но в некоторых действующих учебниках понятие об обратной функции изучается как необязательный материал.

Анализ различных подходов изучения логарифмической функции

1) Совместное изучение показательной и логарифмической функции (П.М. Эрдниев «Укрупнение дидактической единицы: совместное и одновременное изучение взаимосвязанных совместное и одновременное изучение взаимосвязанных действий, операций, функций, теорем и т.д.)
2) Логарифмическая функция сразу же определяется как обратная показательной. Он предполагает предварительное изучение понятий об обратной функции и логарифмах.

Например, понятие логарифма вводится на основе логарифмической функции и определяется как ее значение. Это вполне обоснованно, т. к. для нахождения любого значения функции $y = log_a x$ по аргументу необходимо решить уравнение $a^y = x$; тем самым учащиеся подводятся к привычному определению логарифма как показателя степени. Затем изучаются свойства логарифмов и их приложения.

В действующих учебниках в полном объеме такой подход не реализуется. Однако в концепции А. Г. Мордковича используется лишь несколько видоизменённый такой порядок изучения: понятие логарифма (на наглядно-графическом уровне), логарифмическая функция (график ее получается с помощью симметрии из графика показательной функции), свойства логарифмов, приложения.

3) Существует и аксиоматическое введение логарифмической функции, которое определяется тремя условиями: $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ для любых $x>0$, $y>0$, $f(a) = 1$ для любого $a>1$, $f(x)$ – возрастающая функция.

4) В методической литературе предлагается еще один подход, основанный на понятиях математического анализа. Исходным определением в построении логарифмической, а затем и показательной функций служит его символическая запись (идущая от Ф. Клейна): $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$. Логарифмическая функция может быть представлена в виде степенного ряда:

$$\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \ldots - (-1)^{n-1} x^n/n + ..$$

По традиции логарифмическая функция все же изучается после показательной.

Рассмотрим методические особенности изучения логарифмической функции, которая вводится после изучения логарифмов и без обращения к обратной функции.

Понятие логарифма.

Логарифмом числа **b** по основанию **a** (**$\log_a b$**) называют показатель степени, в которую нужно возвести число **a**, чтобы получить число **b**.

$\log_a b = n$, если **$a^n = b$**.

Примеры: 1) $\log_2 8 = \mathbf{3}$, т. к. $2^3 = 8$;

2) $\log_5(1/25) = \mathbf{-2}$, т. к. $5^{-2} = 1/5^2 = 1/25$; 3) $\log_7 1 = \mathbf{0}$, т. к. $7^0 = 1$.

Под знаком логарифма могут быть только **положительные числа**, причем, основание логарифма — число **$a \neq 1$**. Значением логарифма может быть любое число.

Основное логарифмическое тождество.

Пусть числа **у**, **а** и **х** связаны соотношением $y = a^x$, причем $a > 0, a \neq 1, y > 0$. Тогда верно тождество $x = \log_a y$. Подставим в равенство $y = a^x$ вместо числа **х** его значение $\log_a y$. Получим тождество $a^{\log_a y} = y$.

Это тождество называется основным логарифмическим тождеством, так как оно в точности передает определение логарифма: логарифмом числа **у** при основании **а** называется показатель степени, в которую нужно возвести число **а**, чтобы получить число **у**.

Десятичный логарифм. Логарифм по основанию **10** называют десятичным логарифмом и при написании опускают основание 10 и букву «о» в написании слова «log».

lg7=$\log_{10}7$,   **lg7** – десятичный логарифм числа 7.

Натуральный логарифм. Логарифм по основанию **е** (Неперово число е≈2,7) называют натуральным логарифмом.

ln7=$\log_e 7$,   **ln7** – натуральный логарифм числа 7.

Свойства логарифмов:

Логарифм единицы. $\log_a 1=0$ Логарифм единицы равен нулю ($a>0$, $a\neq 1$).

Логарифм основания. $\log_a a=1$ Логарифм числа **a** по основанию **a** равен единице ($a>0$, $a\neq 1$).

Логарифм произведения. $\log_a(x\cdot y) = \log_a x + \log_a y$. Логарифм произведения равен сумме логарифмов сомножителей.

Логарифм частного. $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$. Логарифм частного равен разности логарифмов делимого и делителя.

Логарифм степени.

$\log_a b^k=k\cdot\log_a b$ Логарифм степени (b^k) равен произведению показателя степени (**k**) на логарифм основания (**b**) этой степени.

Логарифм по основанию a^n.

$\log_{a^n} b=(1/n)\cdot\log_a b$ Логарифм числа **b** по основанию a^n равен произведению дроби **1/n** на логарифм числа **b** по основанию **a**.

Логарифм числа b^k по основанию a^n.

$\log_{a^n} b^k = (k/n)\cdot\log_a b$ Формула является комбинацией двух предыдущих формул.

Логарифм числа b^r по основанию a^r.

$\log_{a^r} b^r = \log_a b$ или $\log_a b = \log_{a^r} b^r$

Значение логарифма не изменится, если основание логарифма и число под знаком логарифма возвести в одну и ту же степень.

Формула представления числа в виде логарифма.

$p = \log_a a^p$

Основание логарифма и число под знаком логарифма можно поменять местами по формуле:

$\log_a b = 1/\log_b a$ Логарифм числа **b** по основанию **a** равен единице, деленной на логарифм числа **a** по основанию **b**.

Общая формула перехода к логарифму по другому основанию.

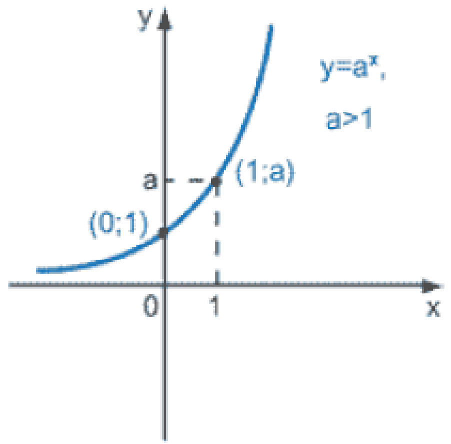
$\log_a b = \log_c b/\log_c a$

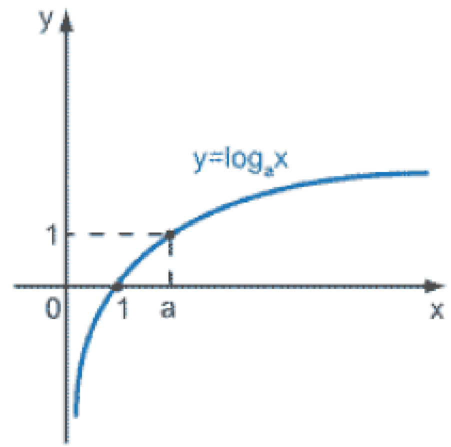
Логарифм числа **b** по основанию **a** равен логарифму числа **b** по новому основанию **c**, деленному на логарифм старого основания **a** по новому основанию **c**.

Логарифмическая функция определяется как функция, заданная формулой $y = log_a x$, если a>0, a≠1.

Необходимо сразу же выяснить необходимость наложения жестких условий на основание a. Они связаны с определение логарифма, из которого следует, что отрицательные числа, нуль и единица не берутся в качестве его основания. Можно в этом убедить учеников на примерах логарифмов чисел с такими основаниями. Пусть a=1, тогда $log_1 b = x$ означало бы корень уравнения $1^x = b$. При b≠1 уравнения корней не имеет, а при b=1 имеет бесконечное множество, следовательно символ бесполезен. Аналогично можно показать бессмысленность символа $log_0 b$. При отрицательных a некоторые целые числа все же имеют логарифмы, но на практике они встречаются редко, поэтому в школе их не рассматривают. После таких пояснений важно выписать промежутки, на которых будет исследоваться функция: (1;+∞) и (0;1).

Для выяснения вида графика полезно выбрать по одной конкретной функции из обозначенных промежутков: $y = log_2 x$ и $y = log_{1/2} x$. По точкам построить их графики на разных рисунках (в качестве значений аргумента x выбираются целые и дробные числа, являющиеся степенями числа 2 или числа ½) и, опираясь на определение логарифма и вид графика, выявить основные свойства в зависимости от основания; убедиться, что графики проходят через точку (1;0). Затем результаты наблюдений, выполненных при активном участии учащихся, необходимо перенести на логарифмическую функцию при $a>1$ и при $0<a<1$, используя схематические рисунки из учебника. Важно свойства занести в таблицу и доказать их аналитически. График функции называют логарифмической кривой или логарифмикой.





$y = \log_a x$		
№ п/п	$a>1$	$0<a<1$
1	$D(y)=(0;+\infty)$	
2	$E(y)=R$	
3	Возрастает	Убывает
4	$y>0$ при $x>1$ $y<0$ при $0<x<1$ $y=0$ при $x=1$	$y>0$ при $0<x<1$ $y<0$ при $x>1$ $y=0$ при $x=0$
5	Непрерывна	
6	Не является ни четной, ни нечетной	
7	График расположен правее оси ординат в I и IV координатных углах и проходит через точки (0;1), (a;1); отсутствует симметрия графика; ось ординат является асимптотой графика; график непрерывная логарифмическая кривая	
8	Графики функций $y = \log_a x$ и $y = \log_{1/a} x$ симметричны относительно оси абсцисс	

В некоторых учебниках исследование функции проводится без обращения к графическим иллюстрациям. На основе определения и свойств логарифмов формулируются основные свойства функции и доказываются. А затем утверждается, что опираясь на доказанные свойства, нетрудно построить график функции при $a>1$ и $0<a<1$. Приводится рисунок с готовыми графиками функций по различным основаниям. Кроме того выясняется вопрос о симметричности графиков логарифмической и показательной функций относительно прямой $y=x$, функции называются взаимно обратными.

Вариант изучения свойств логарифмической функции как функции, обратной показательной.

В этом случае на момент ее введения должно быть известно понятие обратной функции и условие ее существования. Считается, что введение функции, обратной данной, представляет определённую трудность и в методическом плане. Учащиеся должны хорошо усвоить следующие вопросы: определения обратной функции, обратимой функции и взаимно обратных функций, условия обратимости функции (каждое свое значение принимает только один раз; монотонная функция обратима – обратное утверждение не верно), прием задания формулой обратной функции (выразить переменную x через y и поменять обозначения местами), прием построения графика обратной функции (график данной функции отразить от прямой y=x симметрично), свойства взаимно обратных функций (области определения и значений меняются местами, обратная к возрастающей (убывающей) функции является возрастающей (убывающей) функцией) и приводить примеры взаимно обратных функций среди изученных.

Знание перечисленных вопросов поможет отыскать новую функцию, обратную показательной, и установить ее свойства с большей степенью самостоятельности. Свойства логарифмической функции выводятся из свойств взаимно обратных функций и свойств показательной функции, поэтому они должны быть все обстоятельно воспроизведены в ходе фронтальной устной работы с привлечением графиков известной функции.

Логарифмическая функция - функция, обратная *показательной функции*.

Чтобы получить формулу **логарифмической функции**, напишем формулу показательной функции $y = a^x$, выразим **х** через **у** и поменяем обозначения переменных:

$$y = a^x$$

$$x = \log_a y$$

$$y = \log_a x$$

В этой формуле число **а** - то самое, которое является основанием показательной функции. То есть **а** обязательно положительное число, не равное единице.

Теперь можно дать и другое определение: Логарифмической функцией называется функция, которую можно задать формулой $y = \log_a x$, где **а** положительное число, не равное единице.

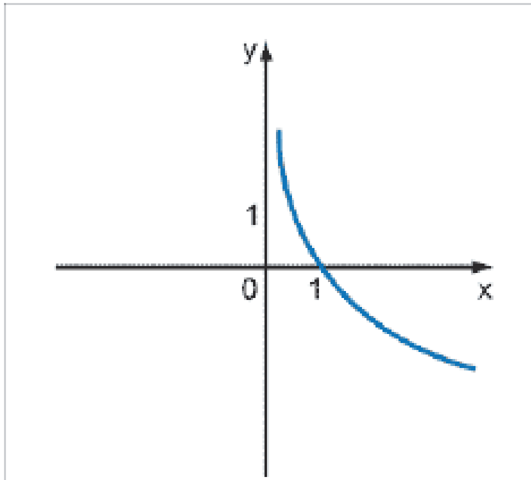
Логарифмическая функция при основании, меньшем 1

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$. Поэтому мы можем построить график логарифмической функции без ее исследования, а только опираясь на определение.

Получилась кривая, проходящая через точки **(1;0)** и **(a;1)**. По этому графику мы можем установить следующие свойства логарифмической функции с основанием, меньшим единицы:

1. область определения - та же, что и область значений показательной функции - множество всех положительных чисел;
2. область значений - та же, что и область определения показательной функции - множество всех действительных чисел;
3. нулем функции является число **1**, так как логарифм единицы равен нулю;

4. интервалы знакопостоянства **(0;1)** и **(1; $+\infty$)** на первом функция положительна, на втором отрицательна;
5. функция убывает на всей области определения, так же, как и показательная функция с основанием, меньшим единицы;
6. функция стремится к $+\infty$, когда аргумент стремится к нулю. Функция стремится к $-\infty$, когда аргумент стремится к $+\infty$.



Логарифмическая функция при основании, большем 1

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$. Поэтому мы можем построить график логарифмической функции без ее исследования, а только опираясь на определение. Получилась кривая, проходящая через точки **(1;0)** и **(a;1)**. По этому графику мы можем установить следующие свойства логарифмической функции с основанием, большим единицы:

1. область определения - та же, что и область значений показательной функции - множество всех положительных чисел;
2. область значений - та же, что и области определения показательной функции - множество всех действительных чисел;
3. нулем функции является число **1**, так как логарифм единицы равен нулю;
4. интервалы знакопостоянства **(0;1)** и **(1;** $+\infty$**)**; на первом функция отрицательна, на втором положительна;
5. функция возрастает на всей области определения, так же, как и показательная функция с основанием, большим единицы;
6. функция стремится к $-\infty$, когда аргумент стремится к нулю. Функция стремится к $+\infty$, когда аргумент стремится к **+0**.

Учебник А.Г.Мордковича 11 класс. Базовый и углубленный уровни

Понятие обратной функции изучается в 10 классе

Глава 2. **Степени и корни. Степенные функции**

Глава 3. **Показательная и логарифмическая функции**

Итак, $y = \log_a x$ — функция, обратная по отношению к функции $y = a^x$, а потому её график получается из графика показательной функции $y = a^x$ с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y = x$.

На рис. 62 схематически изображены графики функций $y = a^x$ и $y = \log_a x$ в случае, когда $a > 1$; на рис. 63 схематически изображены графики функций $y = a^x$ и $y = \log_a x$ в случае, когда $0 < a < 1$.

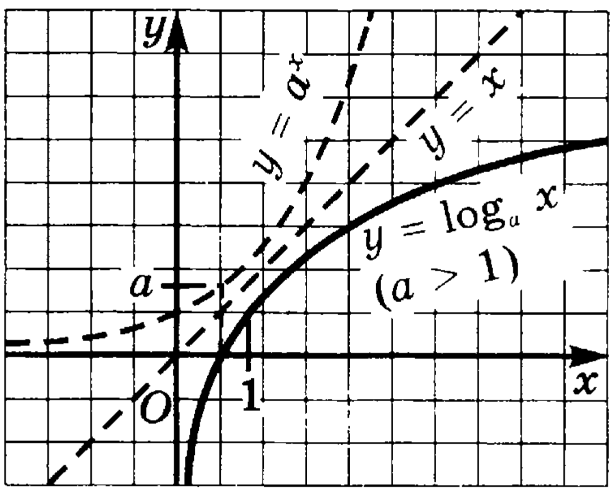


Рис. 62

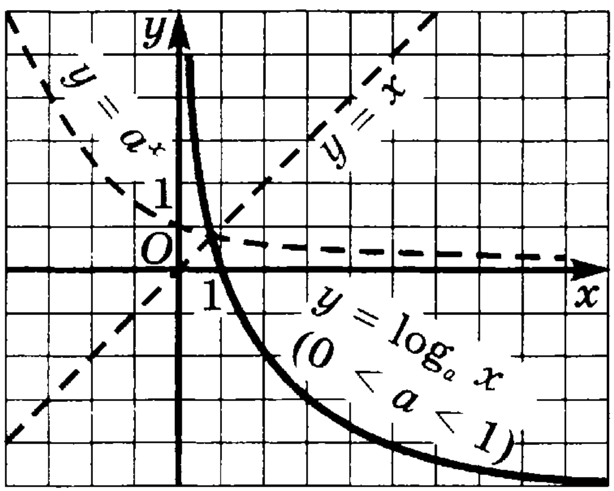


Рис. 63

Учебник Ю.М.Колягина 10 класс. Профильный уровень

Вы знаете, что выражение $\log_a x$ определено при $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$.

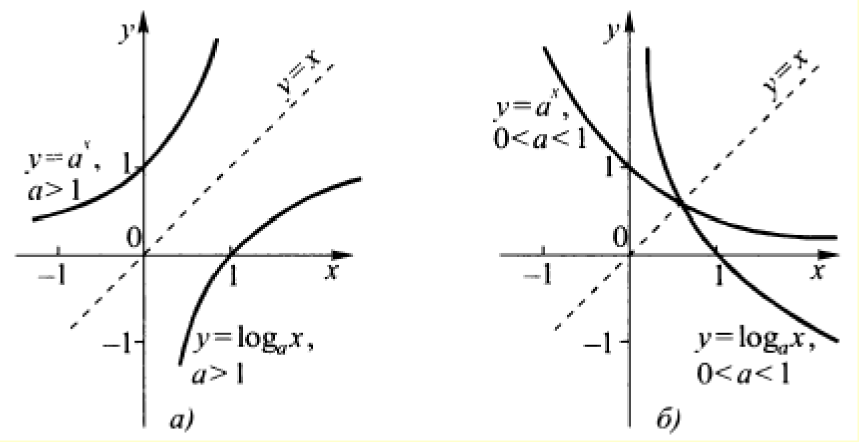
Пусть задано основание логарифма $a > 0$, $a \neq 1$. Тогда каждому $x > 0$ соответствует число $y = \log_a x$. Тем самым задана функция $y = \log_a x$.

*Функцию $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, называют **логарифмической**.*

Логарифмическая функция обладает следующими свойствами:

Свойство 5. Логарифмическая функция $y = \log_a x$ и показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, взаимно обратны (рис. 39 *а*, *б*).

○ Из формулы $y = a^x$ выразим x через y. По определению логарифма $y = \log_a y$. Меняя местами x и y, получаем $y = \log_a x$. ●



С.М. Никольский 10 класс. Базовый и профильный уровень

5.3. Логарифмическая функция

Пусть a — положительное, не равное 1 число. Каждому положительному числу x поставим в соответствие число y, равное логарифму числа x по основанию a. Иными словами, на множестве положительных чисел определим функцию

$$y = \log_a x. \qquad (1)$$

Функцию $y = \log_a x$ называют **логарифмической функцией.** Областью ее определения является множество всех положительных чисел.

Построим график функции (1) при $a > 1$. Для этого сначала построим в системе координат xOy график показательной функции

$$x = a^y$$

для всех $y \in (-\infty; +\infty)$.

Каждая точка графика функции $x = a^y$ имеет координаты $(a^y; y)$. А совокупность точек $(a^y; y)$, соответствующих любым действительным числам y, и есть график функции $x = a^y$ — кривая Г (рис. 47).

Заметим, что для $x > 0$ равенства

$$x = a^y \quad \text{и} \quad y = \log_a x$$

выражают одну и ту же зависимость между x и y. При этом, когда y пробегает любые действительные значения, x пробегает любые положительные значения (см. рис. 47). Поэтому можно считать, что кривая Г есть также совокупность точек $(x; \log_a x)$, соответствующих любым положительным значениям x.

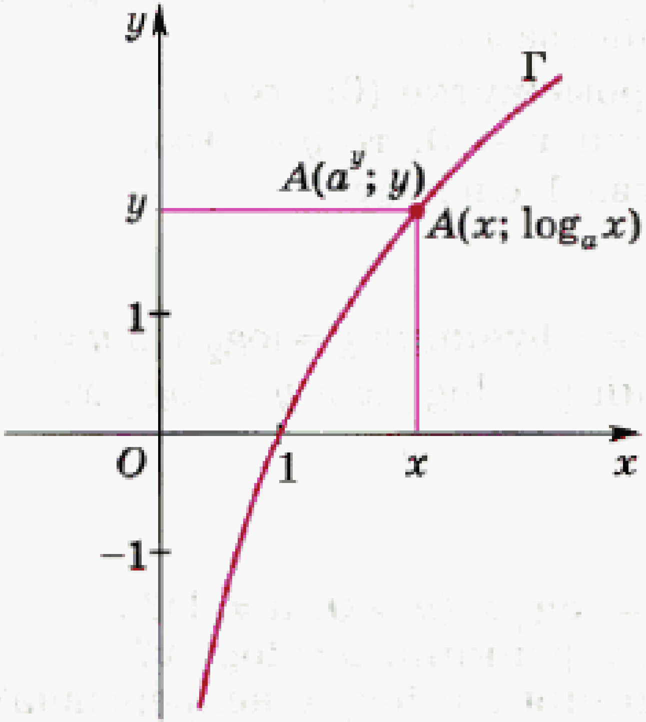


Рис. 47

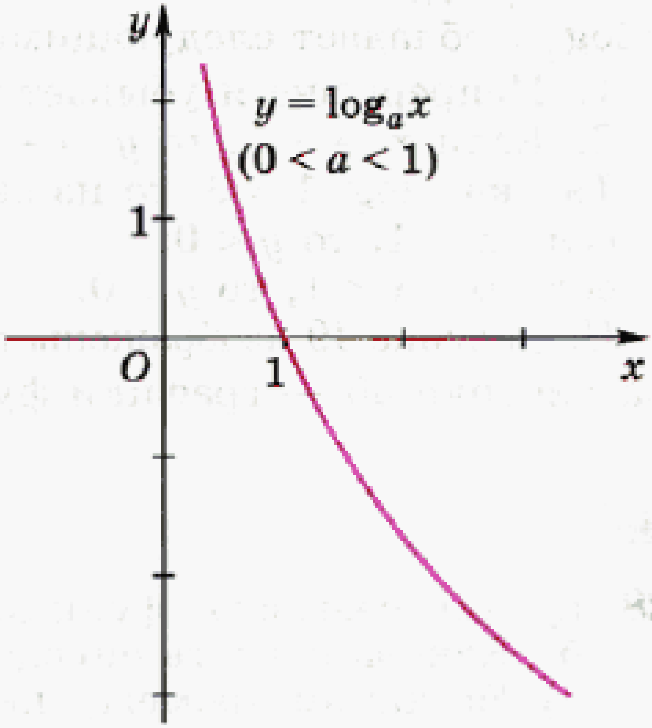


Рис. 48

Таким образом, при $a > 1$ функция $y = \log_a x$ обладает следующими свойствами:

1. Непрерывна и возрастает на промежутке $(0; +\infty)$.
2. Если $x \to +\infty$, то $y \to +\infty$; если $x \to 0$, то $y \to -\infty$.

Так как $\log_a 1 = 0$, то из свойства 1 следует:
если $x > 1$, то $y > 0$;
если $0 < x < 1$, то $y < 0$.

На рисунке 48 изображен график функции $y = \log_a x$ при $0 < a < 1$.

Рассуждая аналогично, получим, что при $0 < a < 1$ функция $y = \log_a x$ обладает следующими свойствами:

1. Непрерывна и убывает на промежутке $(0; +\infty)$.
2. Если $x \to +\infty$, то $y \to -\infty$; если $x \to 0$, то $y \to +\infty$.

Так как $\log_a 1 = 0$, то из свойства 1 следует:
если $x > 1$, то $y < 0$;
если $0 < x < 1$, то $y > 0$.

С.М. Никольский 11 класс. Базовый и профильный уровень