

# СОДЕРЖАНИЕ КУРСА ЛЕКЦИЙ 1 Семестра

## Раздел 1. Векторная и линейная алгебра. 10 часов.

### Лекция 1. Матрицы, операции над ними. Определители.

Определение матрицы. Обозначения матрицы. Элементы, строки, столбцы. Порядок матрицы. Транспонированная матрица. Равенство матриц. Квадратная матрица, основная и вспомогательная диагонали. Единичная матрица. Линейные операции над матрицами: сложение, вычитание, умножение на число. Пример. Умножение матриц. Некоммутативность умножения матриц. Умножение на единичную матрицу. Пример.

Понятие определителя квадратной матрицы. Правило вычисления определителей 2 порядка. Правила вычисления определителей 3 порядка: правило треугольников, правило дополнения (Саррюса).

### Лекция 2. Свойства определителя квадратной матрицы. Обратная матрица.

Свойства определителя (на примерах и с доказательствами). Минор и алгебраическое дополнение элемента определителя. Использование свойств для вычисления определителей любого порядка. Пример. Определение обратной матрицы. Определение невырожденной (неособой) квадратной матрицы. Вид обратной матрицы (с доказательством). Пример вычисления обратной матрицы.

### Лекция 3. Системы линейных алгебраических уравнений.

Определения однородной и неоднородной алгебраических систем. Матричная запись системы. Определитель системы. Определение решения системы. Совместность системы. Отыскание решений линейной системы: правило Крамера (с доказательством), метод Гаусса (расширенная матрица системы, ее эквивалентные преобразования), с помощью обратной матрицы (решение матричной системы).

### Лекция 4. Векторы.

Скалярные и векторные величины. Определение вектора, его обозначения; нулевой вектор, модуль вектора, коллинеарные векторы, компланарные векторы. Радиус-вектор. Равные векторы, свободные векторы. Координаты вектора. Направляющие косинусы. Линейные операции над векторами: сложение и вычитание векторов, правило параллелограмма, правило замыкания для суммы нескольких векторов; умножение вектора на число. Определения и координатные формы. Базис системы векторов. Разложение вектора по прямоугольному базису (с доказательством).

## **Лекция 5. Нелинейные операции над векторами.**

Нелинейные операции: скалярное, векторное, смешанное произведения векторов, их основные свойства, координатные формы (выводы) и применения произведений (угол между векторами и работа; площади параллелограмма и треугольника, момент силы; объемы параллелепипеда и тетраэдра, условие компланарности трех векторов). Критерии ортогональности, коллинеарности и компланарности векторов.

## **Раздел 2. Аналитическая геометрия. 8 часов.**

### **Лекция 6. Прямая на плоскости.**

Уравнение линии на плоскости. Простейшие задачи на плоскости: расстояние между точками на плоскости (как модуль вектора); деление отрезка в данном отношении (с доказательством); площадь треугольника (формулы), полярные координаты. Уравнения прямой на плоскости: проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору и общее (вывод); с угловым коэффициентом (вывод); проходящей через заданную точку с заданным угловым коэффициентом; через две точки; в отрезках (формулы).

### **Лекция 7. Прямая на плоскости. Плоскость в пространстве.**

Угол между прямыми, заданными общими уравнениями и уравнениями с угловыми коэффициентами (с выводом). Условия параллельности и перпендикулярности прямых. Расстояние от точки до прямой на плоскости (вывод).

Уравнения поверхности и линии в пространстве. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору. Нормаль к плоскости. Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости в отрезках. Угол между плоскостями (формула). Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей. Расстояние от точки до плоскости (формула). Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.

### **Лекция 8. Прямая в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости.**

Уравнения прямой в пространстве: как линии пересечения двух плоскостей; канонические (направляющий вектор прямой); параметрические; проходящей через две точки. Угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности. Расстояние от точки до прямой в пространстве (вывод).

Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью.

### **Лекция 9. Кривые и поверхности 2 порядка.**

Общее уравнение кривых второго порядка (без члена с  $xу$ ). Канонические уравнения эллипса (определение; фокусы, фокальные

радиусы, расстояние между фокусами; вывод; большая и малая полуоси, эксцентриситет; окружность как частный случай), гиперболы (определение, каноническое уравнение; действительная и малая полуоси, асимптоты, эксцентриситет, сопряженная гипербола), параболы (определение; фокус и директриса; вывод; эксцентриситет).

Эллипсоид и сфера, однополостный и двуполостный гиперболоиды, эллиптический и гиперболический параболоиды, конус второго порядка, цилиндры (уравнения, сечения координатными или параллельными координатным плоскостями).

### **Раздел 3. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. 18 часов.**

#### **Лекция 10. Функция одной переменной.**

Определение функции, ее область определения, множество значений, однозначность функции. Способы задания: аналитический, графический, табличный. Классификация функций: алгебраические (рациональные, дробно-рациональные, иррациональные) и трансцендентные функции, основные элементарные функции, элементарные функции. Некоторые свойства функций: монотонность, четность и нечетность, периодичность, обратная функция. Обратные тригонометрические и гиперболические функции.

#### **Лекция 11. Предел функции.**

Предел функции: определения в точке и в бесконечности. Геометрические смыслы пределов функции в точке и в бесконечности. Последовательность, ее предел. Ограниченные функции. Бесконечно малые функции, их свойства (без доказательства). Сравнение бесконечно малых. Свойства пределов (без доказательства): связь предела и бесконечно малой функции; единственность предела; ограниченность функции, имеющей предел; арифметические действия над пределами; предельный переход в неравенствах (2 теоремы). 1 замечательный предел (вывод). Число  $e$  (без вывода). Второй замечательный предел (без доказательства).

#### **Лекция 12. Непрерывность функции.**

Односторонние пределы, необходимое и достаточное условие существования предела функции в точке (без доказательства). Первое определение непрерывной функции. Непрерывность через односторонние пределы, перестановочность знаков предела и непрерывной функции. Приращение функции в точке. Второе определение непрерывности функции. Арифметические действия над непрерывными функциями. Непрерывность функции слева и справа, на интервале и на отрезке. Непрерывность основных элементарных функций (показать непрерывность алгебраических тригонометрических, логарифмической и показательной функций). Формулировка теоремы о непрерывности основных элементарных функций.

Непрерывность сложной функции. Непрерывность функции  $|x|$  (через односторонние пределы). Точки разрыва, их классификация: определение разрывной функции, разрывы 1 (скачок, устранимый) и 2 родов. Кусочно-непрерывная функция. Свойства непрерывных функций: устойчивость знака, прохождение функции через все промежуточные значения, ограниченность на отрезке, достижение наибольшего и наименьшего значений.

### **Лекция 13. Производная функции.**

Приращение функции, определение производной, геометрическая и физическая интерпретации. Производная как функция аргумента  $x$ . Правила дифференцирования: производные суммы, разности, произведения и частного двух функций (вывод). Производные тригонометрических и логарифмической функций.

### **Лекция 14. Производная функции.**

Производная обратной функции. Производные показательной и обратных тригонометрических функций. Производная сложной функции, логарифмическая производная. Производная степенной функции  $x^\alpha, \alpha \in R$ . Таблица производных. Производная параметрически заданной функции. Производная неявной функции.

### **Лекция 15. Дифференцируемость функции одной переменной.**

Определение дифференцируемой функции. Связь между дифференцируемостью и существованием производных (с доказательством), дифференцируемостью и непрерывностью (с доказательством). Пример недифференцируемой непрерывной функции. Дифференциал функции одной переменной, его геометрический смысл. Инвариантность формы дифференциала. Производные и дифференциалы высших порядков. Физический и геометрический смысл второй производной.

### **Лекция 16. Основные теоремы дифференциального исчисления.**

Теорема Ферма (с доказательством), геометрический смысл, не выполнение ее условий на отрезке. Теорема Ролля (с доказательством), геометрический и физический смыслы. Существенность условий теоремы Ролля. Теорема Лагранжа (с доказательством), геометрический и физический смыслы. Формула Лагранжа. Формула Тейлора для функции одной переменной.

### **Лекция 17. Применение производной.**

Разложение функций  $e^x, \sin x, \cos x, (1+x)^\alpha$  по формуле Маклорена. Исследование и построение графиков функций. Возрастание и убывание функции на промежутке. Достаточный признак монотонности (с доказательством). Экстремумы. Локальный и глобальный экстремумы. Необходимые и достаточные условия существования экстремума функции одной переменной.

## Лекция 18. Построение графиков функций с помощью производной.

Выпуклость графика функции, точки перегиба (определения).  
Необходимое и достаточные условия существования точки перегиба.  
Асимптоты графика функции: вертикальные, наклонные (показать  
выделение целой части функции), горизонтальные. Общая схема  
исследования и построения графика функции. Примеры:  $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$ ,

$$y = x^3 \sqrt{(x-2)^2}.$$