

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА ЛЕКЦИЙ 1 Семестра

Раздел 1. Векторная и линейная алгебра. 10 часов.

Лекция 1. Матрицы, операции над ними. Определители.

Определение матрицы. Обозначения матрицы. Элементы, строки, столбцы. Порядок матрицы. Транспонированная матрица. Равенство матриц. Квадратная матрица, основная и вспомогательная диагонали. Единичная матрица. Линейные операции над матрицами: сложение, вычитание, умножение на число. Пример. Умножение матриц. Некоммутативность умножения матриц. Умножение на единичную матрицу. Пример.

Понятие определителя квадратной матрицы. Правило вычисления определителей 2 порядка. Правила вычисления определителей 3 порядка: правило треугольников, правило дополнения (Саррюса).

Лекция 2. Свойства определителя квадратной матрицы. Обратная матрица.

Свойства определителя (на примерах и с доказательствами). Минор и алгебраическое дополнение элемента определителя. Использование свойств для вычисления определителей любого порядка. Пример. Определение обратной матрицы. Определение невырожденной (неособой) квадратной матрицы. Вид обратной матрицы (с доказательством). Пример вычисления обратной матрицы.

Лекция 3. Системы линейных алгебраических уравнений.

Определения однородной и неоднородной алгебраических систем. Матричная запись системы. Определитель системы. Определение решения системы. Совместность системы. Отыскание решений линейной системы: правило Крамера (с доказательством), метод Гаусса (расширенная матрица системы, ее эквивалентные преобразования), с помощью обратной матрицы (решение матричной системы).

Лекция 4. Векторы.

Скалярные и векторные величины. Определение вектора, его обозначения; нулевой вектор, модуль вектора, коллинеарные векторы, компланарные векторы. Радиус-вектор. Равные векторы, свободные векторы. Координаты вектора. Направляющие косинусы. Линейные операции над векторами: сложение и вычитание векторов, правило параллелограмма, правило замыкания для суммы нескольких векторов; умножение вектора на число. Определения и координатные формы. Базис системы векторов. Разложение вектора по прямоугольному базису (с доказательством).

Лекция 5. Нелинейные операции над векторами.

Нелинейные операции: скалярное, векторное, смешанное произведения векторов, их основные свойства, координатные формы (выводы) и применения произведений (угол между векторами и работа; площади параллелограмма и треугольника, момент силы; объемы параллелепипеда и тетраэдра, условие компланарности трех векторов). Критерии ортогональности, коллинеарности и компланарности векторов.

Раздел 2. Аналитическая геометрия. 8 часов.

Лекция 6. Прямая на плоскости.

Уравнение линии на плоскости. Простейшие задачи на плоскости: расстояние между точками на плоскости (как модуль вектора); деление отрезка в данном отношении (с доказательством); площадь треугольника (формулы), полярные координаты. Уравнения прямой на плоскости: проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору и общее (вывод); с угловым коэффициентом (вывод); проходящей через заданную точку с заданным угловым коэффициентом; через две точки; в отрезках (формулы).

Лекция 7. Прямая на плоскости. Плоскость в пространстве.

Угол между прямыми, заданными общими уравнениями и уравнениями с угловыми коэффициентами (с выводом). Условия параллельности и перпендикулярности прямых. Расстояние от точки до прямой на плоскости (вывод).

Уравнения поверхности и линии в пространстве. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору. Нормаль к плоскости. Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости в отрезках. Угол между плоскостями (формула). Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей. Расстояние от точки до плоскости (формула). Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.

Лекция 8. Прямая в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости.

Уравнения прямой в пространстве: как линии пересечения двух плоскостей; канонические (направляющий вектор прямой); параметрические; проходящей через две точки. Угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности. Расстояние от точки до прямой в пространстве (вывод).

Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью.

Лекция 9. Кривые и поверхности 2 порядка.

Общее уравнение кривых второго порядка (без члена с xy). Канонические уравнения эллипса (определение; фокусы, фокальные

радиусы, расстояние между фокусами; вывод; большая и малая полуоси, эксцентриситет; окружность как частный случай), гиперболы (определение, каноническое уравнение; действительная и малая полуоси, асимптоты, эксцентриситет, сопряженная гипербола), параболы (определение; фокус и директриса; вывод; эксцентриситет).

Эллипсоид и сфера, однополостный и двуполостный гиперболоиды, эллиптический и гиперболический параболоиды, конус второго порядка, цилиндры (уравнения, сечения координатными или параллельными координатным плоскостями).

Раздел 3. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. 18 часов.

Лекция 10. Функция одной переменной.

Определение функции, ее область определения, множество значений, однозначность функции. Способы задания: аналитический, графический, табличный. Классификация функций: алгебраические (рациональные, дробно-рациональные, иррациональные) и трансцендентные функции, основные элементарные функции, элементарные функции. Некоторые свойства функций: монотонность, четность и нечетность, периодичность, обратная функция. Обратные тригонометрические и гиперболические функции.

Лекция 11. Предел функции.

Предел функции: определения в точке и в бесконечности. Геометрические смыслы пределов функции в точке и в бесконечности. Последовательность, ее предел. Ограниченные функции. Бесконечно малые функции, их свойства (без доказательства). Сравнение бесконечно малых. Свойства пределов (без доказательства): связь предела и бесконечно малой функции; единственность предела; ограниченность функции, имеющей предел; арифметические действия над пределами; предельный переход в неравенствах (2 теоремы). 1 замечательный предел (вывод). Число e (без вывода). Второй замечательный предел (без доказательства).

Лекция 12. Непрерывность функции.

Односторонние пределы, необходимое и достаточное условие существования предела функции в точке (без доказательства). Первое определение непрерывной функции. Непрерывность через односторонние пределы, перестановочность знаков предела и непрерывной функции. Приращение функции в точке. Второе определение непрерывности функции. Арифметические действия над непрерывными функциями. Непрерывность функции слева и справа, на интервале и на отрезке. Непрерывность основных элементарных функций (показать непрерывность алгебраических тригонометрических, логарифмической и показательной функций). Формулировка теоремы о непрерывности основных элементарных функций.

Непрерывность сложной функции. Непрерывность функции $|x|$ (через односторонние пределы). Точки разрыва, их классификация: определение разрывной функции, разрывы 1 (скачок, устранимый) и 2 родов. Кусочно-непрерывная функция. Свойства непрерывных функций: устойчивость знака, прохождение функции через все промежуточные значения, ограниченность на отрезке, достижение наибольшего и наименьшего значений.

Лекция 13. Производная функции.

Приращение функции, определение производной, геометрическая и физическая интерпретации. Производная как функция аргумента x . Правила дифференцирования: производные суммы, разности, произведения и частного двух функций (вывод). Производные тригонометрических и логарифмической функций.

Лекция 14. Производная функции.

Производная обратной функции. Производные показательной и обратных тригонометрических функций. Производная сложной функции, логарифмическая производная. Производная степенной функции $x^\alpha, \alpha \in R$. Таблица производных. Производная параметрически заданной функции. Производная неявной функции.

Лекция 15. Дифференцируемость функции одной переменной.

Определение дифференцируемой функции. Связь между дифференцируемостью и существованием производных (с доказательством), дифференцируемостью и непрерывностью (с доказательством). Пример недифференцируемой непрерывной функции. Дифференциал функции одной переменной, его геометрический смысл. Инвариантность формы дифференциала. Производные и дифференциалы высших порядков. Физический и геометрический смысл второй производной.

Лекция 16. Основные теоремы дифференциального исчисления.

Теорема Ферма (с доказательством), геометрический смысл, не выполнение ее условий на отрезке. Теорема Ролля (с доказательством), геометрический и физический смыслы. Существенность условий теоремы Ролля. Теорема Лагранжа (с доказательством), геометрический и физический смыслы. Формула Лагранжа. Формула Тейлора для функции одной переменной.

Лекция 17. Применение производной.

Разложение функций $e^x, \sin x, \cos x, (1+x)^\alpha$ по формуле Маклорена. Исследование и построение графиков функций. Возрастание и убывание функции на промежутке. Достаточный признак монотонности (с доказательством). Экстремумы. Локальный и глобальный экстремумы. Необходимые и достаточные условия существования экстремума функции одной переменной.

Лекция 18. Построение графиков функций с помощью производной.

Выпуклость графика функции, точки перегиба (определения).
Необходимое и достаточные условия существования точки перегиба.
Асимптоты графика функции: вертикальные, наклонные (показать
выделение целой части функции), горизонтальные. Общая схема
исследования и построения графика функции. Примеры: $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$,

$$y = x^3 \sqrt{(x-2)^2}.$$