

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ЛЕКЦИЯМ.

Раздел 1. Векторная и линейная алгебра.

Лекция 1. Матрицы, операции над ними. Определители.

1. Определения матрицы и транспонированной матрицы.
2. Что называется порядком матрицы? Если в матрице 3 строки и 5 столбцов, то каков ее порядок? Порядок транспонированной матрицы?
3. Какая матрица называется квадратной? Единичной?
4. Определение суммы матриц. Можно ли сложить матрицы A порядка 3×4 и B порядка 3×5 ?
5. Определение умножения матрицы на число. Пусть a_{ij} - элементы матрицы A . Каковы элементы матрицы $4A$?
6. Умножение матриц. Матрицы каких порядков можно перемножать?
7. Существуют ли произведения матриц AB и BA , если матрица A имеет порядок 3×4 , а B - 4×2 ?
8. Чему равно произведение матриц EA ?
9. Для каких матриц существуют определители? Правило вычисления определителей второго порядка.
10. Правило треугольников и правило дополнения (Саррюса) для определителей 3 порядка.

Лекция 2. Свойства определителя квадратной матрицы. Обратная матрица.

1. Определитель – это матрица или число?
2. В каких случаях определитель равен нулю?
3. Если k строк определителя умножить на одно и тоже число n , то как изменится определитель?
4. Определения минора и алгебраического дополнения элемента матрицы.
5. В разложение определителя по элементам строки входят миноры или алгебраические дополнения?
6. Что такое невырожденная (неособая) квадратная матрица?
7. Определение обратной матрицы.
8. Почему обратную матрицу может иметь только невырожденная матрица?
9. Имеет ли обратную матрицу прямоугольная матрица порядка 4×2 ?
10. Имеет ли обратную матрицу матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$ и почему?

Лекция 3. Системы линейных алгебраических уравнений.

1. Чем отличается однородная система от неоднородной?

2. В матричной записи системы $AX = B$ каково число столбцов в матрицах X и B ?
3. Что такое определитель системы?
4. Определение решения системы.
5. Какие системы называются совместными?
6. Можно ли использовать правило Крамера при решении системы трех линейных уравнений с четырьмя неизвестными?
7. Можно ли использовать правило Крамера, если определитель системы равен нулю и почему?
8. Можно ли использовать метод Гаусса при решении системы трех линейных уравнений с четырьмя неизвестными?
9. Изменяют ли эквивалентные преобразования расширенной матрицы в методе Гаусса решение системы?
10. Можно ли решать систему с помощью обратной матрицы, если определитель системы равен нулю и почему?

Лекция 4. Векторы.

1. Чем отличаются векторные величины от скалярных? Ускорение – это векторная величина или скалярная?
2. Определение вектора, его модуля. Может ли модуль вектора быть меньше нуля?
3. Что такое коллинеарные векторы? Компланарные векторы?
4. Может ли начало радиус-вектора лежать в точке $A(1,0)$?
5. Какие векторы называются свободными?
6. Как находятся координаты вектора?
7. Определения суммы и разности двух векторов.
8. Можно ли вычитать векторы разных размерностей?
9. Сформулируйте правило параллелограмма.
10. Как расположены и как направлены векторы \vec{a} и $\lambda\vec{a}$, если $\lambda < 0$?
11. Понятие базиса системы векторов. Является ли базисом система двух коллинеарных векторов на плоскости? Система трех компланарных векторов в пространстве?
12. Три формы записи вектора в пространстве.

Лекция 5. Нелинейные операции над векторами.

1. Определение скалярного произведения векторов. Это число или вектор?
2. Определение векторного произведения векторов. Это число или вектор?
3. Определение смешанного произведения векторов. Это число или вектор?
4. Что такое \vec{a}^2 ? Записать \vec{a}^2 в координатах.
5. В каких случаях скалярное произведение равно нулю? Меньше нуля?
6. В каких случаях векторное произведение равно нулю?
7. Основное свойство векторного произведения.

8. Условие коллинеарности двух векторов в координатах.
9. Условие ортогональности двух векторов в координатах.
10. Условие компланарности трех векторов.

Раздел 2. Аналитическая геометрия.

Лекция 6. Прямая на плоскости.

1. Найти середину отрезка с концами в точках $A(1,2)$ и $B(-4,4)$.
2. Что означает, если при делении отрезка в заданном отношении $\lambda = 0$?
 $\lambda = \frac{1}{2}$? $\lambda = 1$?
3. Найти полярные координаты точки $A(-1, \sqrt{3})$.
4. Геометрический смысл параметра b в уравнении с угловым коэффициентом $y = ax + b$.
5. Преобразуйте общее уравнение прямой на плоскости $Ax + By + C = 0$ в уравнение с угловым коэффициентом. Чему равен в этом случае угловой коэффициент?
6. Запишите угловой коэффициент прямой, проходящей через две заданные точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$.
7. Какая из прямых, заданных уравнениями $x - 2y + 4 = 0$, $y = -6x$, $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$, проходит через начало координат?
8. В общем уравнении прямой $Ax + By + C = 0$ объясните смысл коэффициентов A и B .
9. Запишите уравнение прямой в отрезках и объясните смысл входящих в него параметров.
10. Приведите уравнение прямой в отрезках к общему уравнению; к уравнению с угловым коэффициентом.

Лекция 7. Прямая на плоскости. Плоскость в пространстве.

1. Угол между прямыми равен 45 градусам. Чему равен угол между нормальными к прямым?
2. Условия параллельности и перпендикулярности прямых, заданных общими уравнениями.
3. Условия параллельности и перпендикулярности прямых, заданных уравнениями с угловыми коэффициентами.
4. Какие из данных прямых $x + 2y + 4 = 0$, $y = -6x$, $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$, $x - 6y + 7 = 0$ параллельны и перпендикулярны?
5. Что называется расстоянием от точки до прямой?
6. Если расстояние от точки до прямой равно 0 , то что это значит геометрически?
7. Найдите координаты вектора нормали к плоскости $x - 6y + 5z - 7 = 0$; к плоскости $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$.

8. Какая из плоскостей, заданных уравнениями $x - 6y + 5z - 7 = 0$, $x + 2y - 3z + 4 = 0$, $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$, проходит через точку $A\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$?
9. Условие параллельности плоскостей, заданных уравнениями в отрезках.
10. Условие перпендикулярности плоскостей, заданных общими уравнениями.
11. Может ли плоскость, заданная уравнением в отрезках, проходить через начало координат?
12. Какое условие используется для получения уравнения плоскости, проходящей через три данные точки?

Лекция 8. Прямая в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости.

1. По какой линии пересекаются две плоскости в пространстве?
2. Какие прямые в пространстве называются скрещивающимися?
3. Как расположен направляющий вектор относительно прямой, которую он определяет?
4. Могут ли равняться нулю знаменатели дробей в канонических уравнениях прямой и почему?
5. Запишите направляющий вектор прямой, проходящей через две данные точки.
6. Чему равны множители при параметре t в параметрических уравнениях прямой?
7. Запишите условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в пространстве.
8. Расскажите, как находится расстояние от точки до прямой.
9. Как найти расстояние между двумя параллельными прямыми в пространстве?
10. Условие параллельности прямой и плоскости.
11. Условие перпендикулярности прямой и плоскости.
12. Равен ли угол между прямой и плоскостью углу между векторами их определяющими и почему?

Лекция 9. Кривые и поверхности 2 порядка.

1. Найдите среди данных уравнений уравнения эллипса, окружности, гиперболы и параболы: $2x^2 - 2y^2 + 3x - 4y + 1 = 0$, $2x^2 + 2y^2 + 3x - 4y - 2 = 0$, $2y^2 + 3x - 4y + 1 = 0$, $2x^2 + 3y^2 + 3x - 4y + 1 = 0$.
2. Определение и каноническое уравнение эллипса.
3. Определение и каноническое уравнение параболы.
4. Определение и каноническое уравнение гиперболы.
5. Определение и каноническое уравнение окружности.
6. Определение эксцентриситета кривой второго порядка.
7. Для каких кривых эксцентриситет $0 < e < 1$; $e = 0$; $e = 1$; $e > 1$?

8. Уравнения асимптот гиперболы. Что такое асимптота кривой?
9. Запишите уравнение сферы с центром в точке $A\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$.
10. Запишите уравнение кругового цилиндра.

Раздел 3. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

Лекция 10. Функция одной переменной.

1. Определение функции, ее области определения, множества значений.
2. В чем заключается однозначность функции? Какая из формул $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y = 1$ задает функцию и почему?
3. Какие функции являются алгебраическими?
4. Какие функции являются трансцендентными?
5. Перечислите основные элементарные функции. Какие функции называются элементарными?
6. Всегда ли функция, заданная аналитически, имеет график (вспомните функцию Дирихле)?
7. Какие функции относят к монотонным? Дайте определение неубывающей функции.
8. Определения четной и нечетной функций, симметрия их графиков.
9. Определение периодической функции.
10. Определение обратной функции. Определение арксинуса.
11. Формулы гиперболических функций.

Лекция 11. Предел функции.

1. Определение ограниченной функции.
2. Определение бесконечно малой функции.
3. Определение предела функции в точке. Геометрический смысл.
4. Определение предела функции в бесконечности. Геометрический смысл.
5. Определения последовательности и ее предела.
6. Записать связь предела и бесконечно малой функции.
7. Может ли функция иметь два предела?
8. Арифметические действия над пределами.
9. Предельный переход в неравенствах.
10. Записать четыре вида 1 замечательного предела. Какую неопределенность представляет из себя 1 замечательный предел?
11. Запишите два вида второго замечательного предела. Какую неопределенность он из себя представляет?
12. Какие бесконечно малые называются эквивалентными? Что такое O (o большое) и o (o малое)?

Лекция 12. Непрерывность функции.

1. Определение предела слева.
2. Какой предел может существовать в точке a у функции, заданной на отрезке $[a, b]$?
3. Сформулируйте необходимое и достаточное условие существования предела функции в точке.
4. Первое определение непрерывной функции.
5. Запишите определение непрерывности через односторонние пределы.
6. Приращение функции в точке. Второе определение непрерывности функции.
7. Формулировка теоремы о непрерывности основных элементарных функций.
8. Определение разрывной функции. Кусочно-непрерывная функция.
9. Определения разрывов 1 рода (скачок, устранимый).
10. Определение разрыва 2 рода.
11. Формулировка второй теоремы Вейерштрасса о достижении непрерывной на отрезке функцией своих наибольшего и наименьшего значений.

Лекция 13. Производная функции.

1. Определение приращения функции в точке, указать приращение на чертеже.
2. Определение производной.
3. Геометрическая интерпретация производной.
4. Физическая интерпретация производной.
5. Почему производную можно рассматривать как функцию аргумента x ?
6. Формулы производных суммы и разности функций.
7. Формула производной произведения двух функций.
8. Формула производной частного двух функций.
9. Формулы производных тригонометрических функций.
10. Формулы производных логарифмических функций.

Лекция 14. Производная функции.

1. Определения обратной функции и ее производной.
2. Формулы производных показательной функции и экспоненты.
3. Формулы производных обратных тригонометрических функций.
4. Определение производной сложной функции.
5. Определение логарифмической производной.
6. Формула производной степенной функции x^α , $\alpha \in R$.
7. Таблица производных наизусть.
8. Определения параметрически заданной функции и ее производной.
9. Найти производную неявной функции $x^2 + y^2 = 1$.

Лекция 15. Дифференцируемость функции одной переменной.

1. Определение дифференцируемой функции.
2. Связь между дифференцируемостью и существованием производных. Почему операцию нахождения производной называют дифференцированием?
3. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью. Всегда ли непрерывная функция дифференцируема (на примере функции $y = |x|$)?
4. Дифференциал функции одной переменной, его геометрический смысл.
5. В чем заключается инвариантность формы дифференциала?
6. Определения производных второго и произвольного порядков.
7. Определения дифференциалов второго и произвольного порядков.
8. Физический смысл второй производной.
9. Геометрический смысл второй производной.

Лекция 16. Основные теоремы дифференциального исчисления.

1. Сформулируйте теорему Ферма.
2. Сформулируйте теорему Ролля.
3. Сформулируйте теорему Лагранжа.
4. Геометрический смысл теоремы Ферма.
5. Показать невыполнение условий теоремы Ферма на отрезке.
6. Геометрический смысл теоремы Ролля.
7. Физический смысл теоремы Ролля.
8. Существенность условий теоремы Ролля.
9. Геометрический смысл теоремы Лагранжа.
10. Записать формулу Лагранжа.

Лекция 17. Применение производной.

1. Запишите формулу Тейлора для функции одной переменной. Укажите многочлен Тейлора.
2. Для чего нужен остаточный член в формуле Тейлора?
3. Отличие формулы Маклорена от формулы Тейлора.
4. Запишите разложение функции e^x по формуле Маклорена.
5. Запишите разложение функции $\sin x$ по формуле Маклорена.
6. Запишите разложение функции $\cos x$ по формуле Маклорена.
7. Определение возрастающей функции.
8. Если $f'(x) < 0 \quad \forall x \in [a, b]$, то как ведет себя функция $f(x)$?
9. Чем локальный экстремум отличается от глобального?
10. Необходимые условия существования экстремума функции одной переменной. Какая точка называется критической?
11. Первое достаточное условие существования экстремума функции одной переменной.
12. Второе достаточное условие существования экстремума функции одной переменной.

Лекция 18. Построение графиков функций с помощью производной.

1. Определения выпуклости вверх и вниз графика функции.
2. Определение точки перегиба графика функции.
3. Необходимое условие существования точки перегиба.
4. Достаточное условие существования точки перегиба.
5. Определение асимптоты графика функции.
6. Найдите вертикальные асимптоты графика функции $y = \frac{x}{x^2 - 2}$.
7. По каким формулам ищутся наклонные асимптоты?
8. Какая асимптота называется горизонтальной?
9. Найдите наклонные асимптоты графика функции $y = \frac{x^3}{x^2 + 2}$.
10. Общая схема исследования и построения графика функции.