

Занятие 19. Производная. Дифференциал.

Производная от функции $y = f(x)$ в точке x : $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Дифференциал функции $y = f(x)$: $dy = y'dx$. **Правила дифференцирования:** 1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$. 2. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$. 3. $(c \cdot u)' = c \cdot u'$.

4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$. **Производные основных элементарных функций:**

$$1. \quad c' = 0. \quad 2. \quad (x^n)' = nx^{n-1}; \quad x' = 1; \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

$$3. (a^x)' = a^x \cdot \ln a; (e^x)' = e^x. \quad 4. (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}; (\ln x)' = \frac{1}{x}. \quad 5. (\sin x)' = \cos x.$$

$$6. (\cos x)' = -\sin x. \quad 7. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}. \quad 8. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \quad 9. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$10. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad 11. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}. \quad 12. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Задачи.

1. Найти производные функций, используя определение производной.

$$1). \quad y = x^2 - x; \quad 2). \quad y = \sqrt{x+4}.$$

2. Найти производные функций, используя таблицу производных.

$$1). \quad y = 3x - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}. \quad 2). \quad y = x^2 + \frac{1}{3x^2} - \frac{2}{5x^3}. \quad 3). \quad y = 4\sqrt{x} + 8\sqrt[4]{x} - 5\sqrt{x^2}. \quad 4).$$

$$y = \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{x}{\sqrt[4]{x}}. \quad 5). \quad y = x^3 - 2\sin x + 3\operatorname{ctg} x. \quad 6). \quad y = x^5 + \cos x + \operatorname{tg} x.$$

$$7). \quad y = x^2 + 2^x + e^x. \quad 8). \quad y = \ln x + \log_2 x + \log_3 x. \quad 9). \quad y = \arcsin x - \lg x + \operatorname{arcctg} x.$$

$$10). \quad y = x^2 \cos x. \quad 11). \quad y = \sqrt{x} \operatorname{ctg} x. \quad 12). \quad y = e^x \operatorname{arctg} x. \quad 13). \quad y = \frac{x^3}{x^2 - 1}. \quad 14). \quad y = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}}.$$

$$15). \quad y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}. \quad 16). \quad y = \frac{3^x}{\sin x + 1}. \quad 17). \quad y = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1); \text{ найти } y'(0) \text{ и } y'(1).$$

3. Найти дифференциалы функций.

$$1). \quad y = (x^2 + 4x + 1)(x^2 - \sqrt{x}). \quad 2). \quad y = \frac{x^3 + 1}{x^3 - 1}. \quad 3). \quad y = \frac{1}{1-t^2}. \quad 4). \quad r = \frac{\cos \varphi}{1 - \varphi^2}. \quad 5). \quad y = \frac{m-n}{x^{0.2}}.$$

Дополнительные задачи.

1. При каком значении независимой переменной x касательные к кривым $y = x^2$ и $y = x^3$ параллельны?

$$2. \quad f(z) = \frac{2z^3 - 3z + \sqrt{z-1}}{z}. \text{ Найти } f'\left(\frac{1}{4}\right).$$

3. Убедиться, что функция $y = \frac{1 + \ln x}{x - x \ln x}$ удовлетворяет соотношению $2x^2 dy = (x^2 y^2 + 1)dx$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч.1. Гл.VII, пар.1, п.1.

1. Найти производную функции $y = x^3 + 3x$, используя определение производной.

2. Найти производные функций, используя таблицу производных.

1). $y = 2x - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^3}$. 2). $y = 6x^2 + \frac{1}{3x} - \frac{2}{x^3}$. 3). $y = 3\sqrt{x} + 8\sqrt[4]{x^3} - 5\sqrt[3]{x^2}$. 4).

$y = \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{x}{\sqrt[4]{x^3}}$. 5). $y = x^4 - \cos x + 7\operatorname{tg} x$. 6). $y = 2x^6 + \sin x + 4\operatorname{ctg} x$. 7).

$y = x^2 + 2^x + e^x$. 8). $y = \ln x + \log_4 x + \log_5 x$. 9). $y = \arccos x - 5\lg x + \operatorname{arctg} x$.

10). $y = x^2 \sin x$. 11). $y = \sqrt{x} \operatorname{tg} x$. 12). $y = 2^x \operatorname{arctg} x$. 13). $y = \frac{x^4}{x^2 + 1}$.

14). $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$. 15). $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{x}}$. 16). $y = \frac{e^x}{\cos x + 1}$.

3. Найти дифференциалы функций.

1). $y = (x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 - \sqrt{x})$. 2). $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$. 3). $r = \frac{\sin \varphi}{1 - \varphi^2}$. 4). $y = \frac{m + n}{\sqrt{x}}$.