

## Занятие 23. Производная неявной и параметрически заданной функций.

Если функция  $y = f(x)$  задается соотношением  $F(x, y) = 0$ , то говорят, что она задана неявно. При нахождении производной необходимо помнить, что  $y$

является функцией аргумента  $x$ . **Пример.**  $(x^2 y)' = 2xy + x^2 y'$ .

**Параметрически заданная функция**  $y = f(x)$ :  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ . Ее

**производная:**  $y'_x = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}$ . **Вторая производная** параметрически заданной

функции:  $y''_{xx} = (y'_x)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y''_{tt} x'_t - y'_t x''_{tt}}{x'^3_t}$ .

### Задачи.

1. Найти производные от функций, заданных неявно.

1).  $2y^3 = 2x^2 + \arctg(xy)$ . 2).  $2^x + 2^y = 2^{x+y}$ . 3).  $\ln(x^2 y) = \ctg(y + xy)$ .

4).  $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ . 5).  $\text{arccctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ . 6).  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{4}}$ .

2. Найти производные второго порядка.

1).  $y^2 = \cos(x + y)$ . 2).  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{3}$ . 3).  $y + x = \ln(xy)$ . 4).  $x^3 - y^3 = x^2 y^2$ .

3. Найти производные от функций, заданных параметрически.

1).  $x = 2 \cos t - \cos 2t$ ,  $y = 2 \sin t - \sin 2t$ . 2).  $x = \frac{1}{3} \sin^3 t$ ,  $y = \frac{1}{3} \cos^3 t$ . 3).  $x = 2 \ln \ctgt + 1$ ,  
 $y = \tg t + \ctgt$ . 4).  $x = \frac{3at}{1+t^2}$ ,  $y = \frac{3at^2}{1+t^2}$ . 5).  $x = \sqrt[3]{t^2}$ ,  $y = \sqrt[4]{t^3}$ . 6).  $x = e^{2t} \cos^2 t$ ,  $y = e^{2t} \sin^2 t$ .

4. Найти производные второго порядка.

1).  $x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ ,  $y = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ . 2).  $x = 2^{-2t}$ ,  $y = 2^{2t}$ . 3).  $x = e^{2t} \cos t$ ,  $y = e^{2t} \sin t$ .

4).  $x = t(1 - \sin t)$ ,  $y = t^2 \cos t$ .

### Дополнительные задачи.

1. Из уравнений, параметрически задающих функцию, исключить параметр.

1).  $x = 3t$ ,  $y = 6t - t^2$ . 2).  $x = \cos t$ ,  $y = \sin 2t$ .

2. Найти угловой коэффициент касательной к линии  $x = 3 \cos t$ ,  $y = 4 \sin t$  в точке  $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2}\right)$ .

3. Убедиться, что параметрически заданная функция  $x = 3t^2, y = 3t - t^3$  удовлетворяет соотношению  $36y''(1 - \sqrt{3x}) = x + 3$ .

4.  $e^y + xy = e$ . Найти  $y''(x)$  при  $x = 0$ .

**Задачи для самостоятельной работы.** Данко, ч.1. Гл.VII, пар.1, п.2,3.

1. Найти производные от функций, заданных неявно.

1).  $\sqrt[3]{xy} = e^{x+y^2}$ . 2).  $y^2 \sin x = a^2 \cos^3(x^2 y)$ . 3).  $\operatorname{tg} \sqrt{xy} = x^3 e^y$ . 4).  $x^2 + y^2 - 2axy = 0$ .

5).  $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ . 6).  $x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$ .

2. Найти производные от функций, заданных параметрически.

1).  $x = \ln(1+t^2), y = \operatorname{arccctg} t$ . 2).  $x = \ln \cos t, y = t^2 \sin t$ . 3).  $x = \sin t + \cos t, y = a^t + a^{-t}$ .

4).  $x = \left(\frac{2}{3}\sqrt{t+1}\right)t, y = \sqrt{t} \cdot e^{\sqrt{t}}$ . 5).  $x = e^{-t} \sin^2 t, y = e^t \cos^2 t$ . 6).  $x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3}$ .

3. Найти производные второго порядка.

1).  $y^2 = \cos(x+y)$ . 2).  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{3}$ . 3).  $y+x = \ln(xy)$ . 4).  $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ .

5).  $x = \sqrt[3]{1-\sqrt{t}}, y = \sqrt{1-\sqrt{t}}$ . 6).  $x = a \cos t, y = a \sin t$ . 7).  $x = a(\varphi - \cos \varphi), y = a(1 - \sin \varphi)$ .

8).  $x = \ln t, y = t^2 - 1$ .