

Занятие 24. Правило Лопиталья.

Если предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ представляет собой **неопределенность** $\frac{\infty}{\infty}$ или $\frac{0}{0}$, и существуют производные функций $f(x)$ и $g(x)$ в окрестностях точки a , то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Если производные $f'(x), g'(x)$ обладают теми же свойствами, что и функции, то возможно повторное применение правила:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}, \text{ и т.д.}$$

Задачи.

Вычислить пределы с помощью правила Лопиталья.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}$.
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - x - 1}$.
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$.
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} - 1 + 2x}{x}$.
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}$.
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x}$.
7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x^2 + 3}$.
8. $\lim_{x \rightarrow \infty} 5^{\frac{2x}{x+5}}$.
9. $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$.
10. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$.
11. $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$.
12. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\operatorname{tg} x)^{2 \cos x}$.
13. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\ln x}$.
14. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\frac{1}{e^x - 1 - x}}$.
15. $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

Дополнительные задачи.

Вычислить пределы с помощью правила Лопиталья.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+x)^{1+x}}{x^2} - \frac{1}{x} \right]$.
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{(a+x)(b+x)(c+x)} - x \right)$.
3. $\lim_{x \rightarrow a} \left(2 - \frac{x}{a} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}}$.

4. Пусть $x \rightarrow 0$. Доказать, что $\ln(1+x) - e \ln \ln(e+x)$ - бесконечно малая второго порядка относительно x .

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч.1. Гл.VII, пар.2, п.2.

Вычислить пределы с помощью правила Лопиталья.

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$.
2. $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{1 - 2 \sin x}{\cos 3x}$.
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$.
4. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}$.
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x - \arcsin x}$.
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sin 2x - 12x}{x^3}$.
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-3x) + 3x}{x^2}$.
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln \sin x}$.
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x \cdot \operatorname{ctg} x$.
10. $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x \cdot \ln(x-1)$.
11. $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}$.
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right)$.
13. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$.
14. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}$.
15. $\lim_{x \rightarrow \infty} [(\pi - 2 \operatorname{arctg} x) \ln x]$.
16. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \sin \frac{a}{x} \right)$.