

Занятие 5. Линейные операции над векторами. Разложение вектора по базису.

Вектором называется направленный отрезок. **Координаты вектора** с началом в точке $A(x_1, y_1, z_1)$ и концом в точке $B(x_2, y_2, z_2)$

$$\vec{a} = \vec{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1) = (X; Y; Z).$$

Длина вектора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Проекция вектора на ось u : $np_u \vec{AB} = |\vec{AB}| \cos \varphi$, φ - УГОЛ между осью u и вектором \vec{AB} .

Направляющие косинусы: $\cos \alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}$; $\cos \beta = \frac{y}{|\vec{a}|}$; $\cos \gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}$;

$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. **Сумма (разность) векторов** $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и

$\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$: $\vec{c} = \vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2)$. **Произведение вектора**

$\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ **на число λ :** $\vec{b} = \lambda \vec{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1)$. **Условие коллинеарности**

векторов: $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$. **Разложение вектора \vec{d} по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:**

$\vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$, где α, β, γ - координаты вектора \vec{d} в системе координат $O\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Задачи.

1. По данным векторам \vec{a} и \vec{b} построить векторы $3\vec{a}$; $-\frac{1}{2}\vec{b}$; $2\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$; $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$.
2. Вычислить модуль вектора $\vec{a} = (6; 3; -2)$.
3. Даны точки $A(3; -1; 2)$ и $B(-1; 2; 1)$. Найти координаты векторов \vec{AB} и \vec{BA} .
4. Даны координаты вектора \vec{a} : $X = 4, Y = -12$. Найти Z , если $|\vec{a}| = 13$.
5. Найти начало вектора $\vec{a} = (2; -3; -1)$, если его конец совпадает с точкой $(1; -1; 2)$.
6. Проверить коллинеарность векторов $\vec{a} = (2; -1; 3)$ и $\vec{b} = (-6; 3; -9)$. Какой вектор длиннее, во сколько раз и как они направлены?
7. Разложить вектор $\vec{x} = (-2; 4; 7)$ по векторам $\vec{p} = (0; 1; 2)$, $\vec{q} = (1; 0; 1)$, $\vec{r} = (-1; 2; 4)$.
8. Вектор \vec{a} составляет с осями OX и OY углы $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 45^\circ$. Какой угол вектор составляет с осью OZ ?

Дополнительные задачи.

1. Найти модули суммы и разности векторов $\vec{a} = (3; -5; 8)$ и $\vec{b} = (-1; 1; -4)$.
2. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1 = -2\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{c}_2 = 3\vec{a} - 2\vec{b}$, где $\vec{a} = (3; 4; 4)$, $\vec{b} = (5; 9; 7)$?
3. Разложить вектор $\vec{x} = (2, 5, -7)$ по векторам $\vec{a} = (2, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, 3, 1)$, $\vec{c} = (1, 1, 5)$.
4. Даны: $|\vec{a}| = 13, |\vec{b}| = 19, |\vec{a} + \vec{b}| = 24$. Найти $|\vec{a} - \vec{b}|$.
5. Дано разложение вектора $\vec{c} = 16\vec{i} - 15\vec{j} + 12\vec{k}$ по прямоугольному базису. Найти разложение вектора \vec{d} , коллинеарного \vec{c} и противоположного с ним, при условии, что $|\vec{d}| = 75$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч.1. Гл. II, пар.2.

1. При каких α, β векторы $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ и $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ коллинеарны?
2. Найти конец вектора $\vec{c} = 3\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$, если его начало находится в точке $(1; 2; -3)$.
3. Найти направляющие косинусы вектора $\vec{a} = 12\vec{i} - 15\vec{j} + 16\vec{k}$.
4. Разложить вектор $\vec{x} = (-3, -4, -3)$ по векторам $\vec{a} = (1, 2, 2)$, $\vec{b} = (0, -1, -1)$, $\vec{c} = (1, 2, 1)$.
5. Даны: $|\vec{a}| = 11, |\vec{b}| = 23, |\vec{a} + \vec{b}| = 30$. Найти $|\vec{a} - \vec{b}|$.
6. В треугольнике ABC вектор $\vec{AB} = m$ и вектор $\vec{AC} = n$. Построить следующие векторы: $\frac{m+n}{2}, \frac{m-n}{2}, \frac{n-m}{2}, -\frac{m+n}{2}$.