

Занятие 11. Приложения определенного интеграла. Длины кривых и объемы.

Длина дуги кривой в полярной системе координат $r = r(\varphi)$:

$$l = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi.$$

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной: а) линией $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$:

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b f^2(x) dx;$$

б) линиями $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ на $[a, b]$: $V_{Ox} = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx$.

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной:

а) линией $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$: $V_{Oy} = 2\pi \int_a^b xf(x) dx$;

б) линиями $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ на $[a, b]$: $V_{Oy} = 2\pi \int_a^b x(y_2 - y_1) dx$.

Задачи.

1. Найти длины дуг следующих кривых.

1). $r = a \cos^3 \frac{\varphi}{3}$ (от $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi/2$). 2). $r = a(1 - \cos \varphi)$ (кардиоида).

3). $r = \varphi^2$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

2. Найти объем тела, образованного вращением вокруг координатной оси фигуры, ограниченной заданными линиями.

1). $y = e^x$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ (вокруг Ox). 2). $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ (вокруг Oy).

3). $2y = x^2$, $2x + 2y - 3 = 0$ (вокруг Ox). 4). $y = x^2$, $y = \frac{2}{1+x^2}$ (вокруг Oy).

Дополнительные задачи.

Найти объем усеченного конуса, основания которого ограничены окружностями с радиусами R и r , а высота равна h .

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1, гл. 10, § 4, § 5.

1. Найти длины дуг следующих кривых.

1). $r = a \sin \varphi$. 2). $r = \frac{a}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ (парабола).

3). $r\varphi = 1$, $3/4 \leq \varphi \leq 4/3$ (гиперболическая спираль).

2. Найти объем тела, образованного вращением вокруг координатной оси фигуры, ограниченной заданными линиями.

1). $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (вокруг Ox). 2). $y = x^2 + 1$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$ (вокруг Oy).

3). $y = \sin x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \pi$ (вокруг Ox). 4). $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ (вокруг Oy).