

Занятие 22. Метод неопределенных коэффициентов для линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Линейные однородные уравнения 2 порядка с постоянными коэффициентами. Уравнение вида $y'' + py' + qy = 0$, все члены которого первой степени относительно функции и ее производных, а коэффициенты p, q - постоянные величины, называется **линейным однородным**. Общий интеграл

находится с помощью характеристического уравнения $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Если: а). Корни λ_1, λ_2 характеристического уравнения **действительны и различны**, то общее решение выражается формулой $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$; б). Если действительный корень λ_1 **имеет кратность 2** ($\lambda_1 = \lambda_2$), то общее решение имеет вид $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}$; в). Если характеристическое уравнение имеет **пару однократных комплексно-сопряженных корней** $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, то общее решение имеет вид $y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$;

Метод неопределенных коэффициентов. Метод применим только для линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами и со **специальной правой частью (квазимногочленом)** $f(x) = P_n(x)e^{kx}$, где $k = \alpha + \beta i$ - показатель правой части. Уравнение вида $y'' + py' + qy = P_n(x)e^{kx}$, где коэффициенты p, q - постоянные величины, называется **линейным неоднородным**. Общее решение имеет вид: $y = \bar{y} + \tilde{y}$, где \bar{y} - общее решение линейного однородного уравнения; \tilde{y} - частное решение линейного неоднородного уравнения, которое составляется по виду правой части и зависит от значений корней λ_1, λ_2 характеристического уравнения. **а).** Если $f(x) = P_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, то $\tilde{y} = Q_n(x) \cdot x^r$, где $Q_n(x)$ - многочлен той же степени, что и $P_n(x)$ только с неопределенными коэффициентами; r - количество корней характеристического уравнения, равных 0: $r = 0, 1$. **б).** Если $f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$, то $\tilde{y} = Q_n(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot x^r$, где r - количество корней характеристического уравнения, равных α : $r = 0, 1, 2$. **в).** Если $f(x) = a \cos \beta x + b \sin \beta x$, то $\tilde{y} = (A \cos \beta x + B \sin \beta x) \cdot x^r$, где r - количество корней характеристического уравнения, равных $i\beta$: $r = 0, 1$. **г).** Если $f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + P_m(x) \sin \beta x)$, то $\tilde{y} = e^{\alpha x} (Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x) \cdot x^r$, где $Q_1(x), Q_2(x)$ - многочлены степени s , $s = \max(n, m)$; r - количество корней характеристического уравнения, равных $\alpha + i\beta$: $r = 0, 1$.

Задачи.

1. Найти общие решения линейных однородных уравнений и решение задачи Коши.

1). $y'' - 7y' + 6y = 0$. 2). $y'' - 4y' + 5y = 0$. 3). $y'' - 4y' + 4y = 0$. 4). $\frac{d^2 s}{dt^2} + 2 \frac{ds}{dt} + 2s = 0$,
 $s(0) = s'(0) = 1$

2. Указать виды частных решений для данных неоднородных уравнений.

1). $y'' - 4y = x^2 e^{2x}$. 2). $y'' + 9y = \cos 2x$. 3). $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$. 4). $y'' + 2y' + 2y = e^x \sin x$.

Найти общие решения линейных однородных уравнений и решения задач Коши.

1). $y'' - y' - 2y = 6x^2$. 2). $y'' - 3y' + 2y = e^x$. 3). $y'' + 3y' = 9x$, $y(0) = y'(0) = 2$.
4). $y'' + 4y = \sin x$, $y(0) = y'(0) = 1$.

Дополнительные задачи.

Решить краевую задачу $y'' + y' = 1$, $y'(0) = 0$, $y(1) = 1$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч.2, гл.4, пар.3, пп.3,4.

1. Найти общие решения линейных однородных уравнений.

1). $y'' - 5y' + 6y = 0$. 2). $y'' - 2y' + y = 0$. 3). $y'' - 2y' + 2y = 0$. 4). $y'' + y = 0$.

2. Указать виды частных решений для данных неоднородных уравнений.

1). $y'' - 5y' + 6y = x e^{2x}$. 2). $y'' - 4y' + 4y = \sin 2x$. 3). $y'' - 2y' + 5y = x e^x \cos 2x - x^2 e^x \sin 2x$.

3. Найти общие решения линейных неоднородных уравнений.

1). $y'' + y = \cos x$. 2). $y'' - y' + y = x^3 + 6$. 3). $y'' - y = e^x$. 4). $y'' + y' - 2y = 8 \sin 2x$.