

Занятие 22. Логарифмическая производная. Производные высших порядков.

Логарифмическая производная: $(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$. **Вторая производная:**

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Производная n -го порядка: $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$.

Производная показательно-степенной функции: $(u^v)' = v u^{v-1} u' + u^v \ln u v'$.

Задачи.

1. Найти производную от показательно-степенной функции.

1). $y = x^x$. 2). $y = (\ln x)^{1/x}$. 3). $y = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^{x^2}$. 4). $y = (\sqrt{x+2})^{\sin 2x}$. 5). $y = (\arctg x^2)^{\sqrt{x^2+1}}$. 6). $y = (tg x e^x)^{\sqrt{x}}$.

2. Найти производные функций с помощью логарифмирования.

1). $y = \frac{(x-1)^4 (x+1)^5}{(x^2+2)^7 (x-5)^4}$. 2). $y = x^3 e^{x^2} \sin 2x$. 3). $y = (x^2+1)^3 (x+2)^{10} (2x-5)^8 (6x-7)^{11}$.

4). $y = \frac{(x+1)^3 \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$. 5). $y = \frac{x^2 e^{x \arctg x}}{\ln^3 x}$.

3. Найти производные второго порядка.

1). $y = \cos^2 2x$. 2). $y = x\sqrt{1+x^2}$. 3). $y = (1+x^2)\arctg x$. 4). $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

5). $y = x \ln(\sin x)$.

4. Найти производные высших порядков.

1). $y = \sin^2 x$; $y''' = ?$ 2). $f(x) = \frac{1}{1-x}$; $f^{(v)} = ?$ 3). $y = x^3 \ln x$; $y^{(4)} = ?$ 4). $r = a \sin 2\varphi$;

$\frac{d^4 r}{d\varphi^4} = ?$ 5). $y = \ln x$; $y^{(n)} = ?$

5. Вычислить дифференциалы второго порядка по формуле $d^2 y = y'' dx^2$.

1). $y = \cos^4 2x$. 2). $y = x \ln x$. 3). $y = e^{x^2}$.

Дополнительные задачи.

1. Найти производные функций с помощью логарифмирования.

1). $y = x^{x^x}$. 2). $x^y = y^x$. 3). $y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$.

2. Найти производную n -го порядка от функции $y = \frac{1-x}{1+x}$.

3. Убедиться, что функция $y = \frac{x-3}{x+4}$ удовлетворяет соотношению $2y'^2 = (y-1)y''$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч.1. Гл.VII, пар.1, п.1,6,8.

1. Найти производные функций с помощью логарифмирования.

1). $y = x^{x^a}$. 2). $y = (\sin 3x)^{\sqrt{x}}$. 3). $y = x^{a^x}$. 4). $y = (a^x)^x$. 5). $y = (\sqrt[4]{x})^{\cos 4x}$. 6). $y = \left(\frac{1}{x}\right)^{e^{x^2}}$.

7). $y = \sqrt{x \sin x \sqrt{1-e^x}}$. 8). $y = \frac{(x-1)^4 (x+1)^5}{(x^2+2)^7 (x-5)^4}$. 9). $y = x^4 2^{x^2} \cos 2x$.

10). $y = \frac{(x+2)^5 \sqrt[3]{x+3}}{\sqrt[4]{(x-2)^3}}$. 11). $y = \frac{x e^x \operatorname{arctg} x}{\ln^5 x}$.

2. Найти производные второго порядка.

1). $y = \sin^2 3x$. 2). $y = x e^{\sqrt{x}}$. 3). $y = 2^x x^3$. 4). $y = \sqrt{1-x^2} \arccos x$. 5). $y = x^2 \ln(\cos x)$.

3. Найти производные высших порядков.

1). $y = \cos^2 x$; $y''' = ?$ 2). $f(x) = \frac{1}{1+x}$; $f^{(4)} = ?$ 3). $y = x^4 \lg x$; $y^{(3)} = ?$ 4). $r = a \cos 2\varphi$;

$$\frac{d^5 r}{d\varphi^5} = ?$$

4. Вычислить дифференциалы второго порядка по формуле $d^2 y = y'' dx^2$.

1). $y = \operatorname{arctg} 2x$. 2). $y = x \sin x$. 3). $y = 2^{\sin 2x}$.