

Занятие 15. Нахождение пределов.

Определенные выражения при нахождении пределов: $\infty + \infty = \infty$; $\infty \pm A = \infty$
; $\infty \cdot A = \infty (A \neq 0)$; $\frac{A}{\infty} = 0 (A \neq 0)$; $\frac{A}{0} = \infty (A \neq 0)$; $A^\infty = \begin{cases} \infty, A > 1, \\ 0, A < 1. \end{cases}$

Неопределенности: $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $\frac{0}{0}$, 1^∞ .

$\frac{\infty}{\infty}$. Разделить числитель и знаменатель дроби на наивысшую степень неизвестного, содержащуюся в дроби. При этом $\frac{A}{x^k} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

$\infty - \infty$. Разность квадратных корней умножить и разделить на их сумму; разность дробей привести к общему знаменателю; неопределенность $\infty - \infty$ приводится к неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$.

$\frac{0}{0}$. а). Многочлены в рациональной дроби разложить на множители и сократить на множитель, дающий нуль.

Задачи.

Найти пределы.

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{3x^2 - 4x}$. 2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 1}{x^2 + 1}$. 3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$. 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt[3]{x^3 + 2}}{7x + \sqrt[4]{x^4 + 1}}$.

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x + 1)^2 (2 - x)^3}{(x + 1)(1 - x)^4}$. 6. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x})$. 7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{3x^2 - 4} - \frac{x^2}{3x + 2} \right)$.

8. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$. 9. $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1})$. 10. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3})$.

11. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3}$. 12. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 14x + 12}{x^3 + 2x^2 - 3x}$. 13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^n + 1}$. 14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - 2x}{\sqrt[3]{1 + 8x^3}} + 2^{-x^2} \right)$.

Дополнительные задачи.

Найти пределы.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{\sqrt{3n^2 + n}}$. 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 10^n}{1 + 10^{n+1}}$. 3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^2}{1 - x^2} + 2^{\frac{1}{x}} \right)$. 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 3 + \dots + 2n - 1}{n + 3} - n \right)$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч.1. Гл.VI, пар.4.

Найти пределы.

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - 6x}{3x + 1}$. 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 1}{\sqrt{9n^2 - 1}}$. 3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 1} - \sqrt{4x^2 - 1}}{x + 7}$. 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x + 2)^3 (x - 1)^7}{3x^{10}}$.

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4^n}{2 - 4^{n+1}}$. 6. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 4x})$. 7. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{(n^2 + 1)(n^2 - 4)} - \sqrt{n^4 - 9})$.

$$8. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} \right). \quad 9. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}. \quad 10. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}. \quad 11. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x+6}{x^3+8}.$$

Занятие 16. Нахождение пределов. Первый замечательный предел.

$\frac{0}{0}$. **а).** Многочлены в рациональной дроби разложить на множители и сократить на множитель, дающий нуль. **б).** Разность квадратных корней умножить и разделить на их сумму, а разность кубических корней – на неполный квадрат суммы или сделать замену. **в).** **Первый замечательный предел** $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$; $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} = 1$; $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\arcsin \alpha}{\alpha} = 1$; $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} \alpha}{\alpha} = 1$.

Задачи.

Найти пределы.

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}. \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}. \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}. \quad 4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}. \\ 5. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{3x+1}-4}{3-\sqrt{x+4}}. \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}. \quad 7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x/2)}{x}. \quad 8. \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\operatorname{arctg}(2x-1)}{4x^2-1}. \quad 9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 3x}{x^2}. \\ 10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2}. \quad 11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sqrt{1+x}-1}. \quad 12. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}.$$

Дополнительные задачи.

Найти пределы.

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}. \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}. \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\sqrt{1-3x^2}-1}. \quad 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[4]{1+2x}-1}.$$

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч.1. Гл.VI, пар.4.

Найти пределы.

$$1. \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}. \quad 2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}. \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x^2}. \quad 4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}. \\ 5. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}. \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 5x}. \quad 7. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}. \quad 8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}^2 4x}{x^2}. \quad 9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}. \\ 10. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}.$$