

Занятие 20. Производная сложной функции.

Производная сложной функции $(f(u(x)))' = f'_u(u(x)) \cdot u'(x)$.

Задачи.

Найти производные.

1. $y = \operatorname{tg} 7x$. 2. $y = \sin \frac{x}{2}$. 3. $y = (2x-3)^5$. 4. $y = \frac{1}{(7-2x)^6}$. 5. $y = \sqrt{4x-5}$. 6.

$y = \sqrt[4]{\left(\frac{4x}{5}-3\right)}$. 7. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{7x-8}}$. 8. $y = \operatorname{arctg} \frac{3x}{4}$. 9. $y = \arccos \frac{1}{x}$. 10. $y = \cos^3 2x$.

11. $y = \sqrt{\cos 4x}$. 12. $y = 5^{\sin 2x}$. 13. $y = \ln^3(x^2+1)$. 14. $y = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

15. $y = \operatorname{ctg}^4 3x$. 16. $y = \lg \ln \log_{\pi} x$. 17. $y = 6^{\cos^2 3x}$. 18. $y = \sin \cos \operatorname{tgctg} x$. 19.

$y = \ln^2 \sin^3 5x$. 20. $y = \ln \operatorname{arccctg} \sqrt{4-2x}$. 21. $y = \sqrt[3]{\arccos \frac{2}{x}}$.

Дополнительные задачи.

1. Найти производные.

1). $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$. 2). $y = \log_{\sqrt{x-x^2}} \cos^3 x$. 3). $y = \sqrt[11]{9+6\sqrt{x^9}}$. 4). $y = \ln \sqrt{\frac{3x+2}{5x-1}}$.

2. Убедиться, что функция $y = \ln \frac{1}{1+x}$ удовлетворяет соотношению $x \frac{dy}{dx} + 1 = e^y$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч.1. Гл.VII, пар.1, п.1.

Найти производные.

1. $y = \operatorname{ctg} 8x$. 2. $y = \cos \frac{x}{3}$. 3. $y = (2-3x)^7$. 4. $y = \frac{1}{(5+3x)^9}$. 5. $y = \sqrt{2-5x}$.

6. $y = \sqrt[5]{(3x-9)^2}$. 7. $y = \frac{1}{\sqrt[4]{6x-7}}$. 8. $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$. 9. $y = \operatorname{arccctg} \frac{a}{x}$. 10. $y = \sin^2 3x$.

11. $y = \sqrt{\sin 6x}$. 12. $y = 6^{\cos 3x}$. 13. $y = \log_2(\sqrt{x}+1)$. 14. $y = \sin^4 \frac{x}{4}$.

15. $y = \ln \log_{\pi} \lg x$. 16. $y = e^{\operatorname{tg}^3 2x}$. 17. $y = \log_2 \log_3 \operatorname{tgctg} x$. 18. $y = \operatorname{tg}^5 \lg^3 x^e$. 19.

$y = \lg \operatorname{arctg} \sqrt{3-4x}$. 20. $y = \sqrt[4]{\arcsin \frac{3}{x^2}}$.

Занятие 21. Производная сложной функции.

Задачи.

Найти производные сложных функций.

1. $y = \ln(1+\operatorname{tg} x)$. 2. $y = \lg(\sin x + e^x)$. 3. $y = \operatorname{arctg}^3 \frac{1}{x}$. 4. $y = \operatorname{tg} \frac{1}{\cos^2 x}$. 5. $y = x^2 2^{x^2}$.

$$6. y = x \arcsin 5x. \quad 7. y = e^{\sqrt{x}} \cdot \arcsin e^x. \quad 8. y = \frac{x}{3} \cdot \sqrt[3]{\ln 3x}. \quad 9. y = \frac{\cos 4 \cdot \ln^3(x^2 - 2)}{\sqrt{x}}.$$

$$10. y = \frac{2 \cos x}{\sqrt{\cos 2x}}. \quad 11. y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}. \quad 12. y = \frac{\ln \sin x}{\ln \cos x}. \quad 13. y = \ln \frac{\lg x}{\ln x}. \quad 14. y = e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}.$$

$$15. y = \sin x \cdot e^x \cdot \cos^3 x. \quad 16. y = \frac{\sin^2 x}{1 + \operatorname{ctgx}} + \frac{\cos^2 x}{1 + \operatorname{tgx}}. \quad 17. y = \sqrt{x^2 + 1} - \ln \left(\frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right).$$

$$18. y = 2 \ln(2x - 3\sqrt{1 - 4x^2}) - 6 \arcsin 2x. \quad 19. y = \frac{x e^x \operatorname{arctgx}}{\ln^5 x}. \quad 20. y = \arccos \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}.$$

Дополнительные задачи.

1. Найти производные сложных функций.

$$1). y = \frac{1}{m\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} \left(e^{mx} \sqrt{\frac{a}{b}} \right). \quad 2). y = \sqrt[3]{\frac{x-5}{\sqrt{x^2+4}}}. \quad 3). y = \frac{(1-x^2)e^{3x-1} \cos x}{\arccos^3 x}.$$

$$4). y = \frac{\sin x}{4 \cos^4 x} + \frac{3 \sin x}{8 \cos^2 x} + \frac{3}{8} \ln \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}}.$$

2. Убедиться, что функция $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ удовлетворяет соотношению $(1-x^2)y' - xy = 1$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч.1. Гл.VII, пар.1, п.1.

Найти производные сложных функций.

$$1. y = \lg(1 + \operatorname{ctgx}). \quad 2. y = \ln(\cos x + 2^x). \quad 3. y = \operatorname{arctg}^2 \frac{1}{x^2}. \quad 4. y = \operatorname{ctg} \frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$5. y = x \arccos 7x. \quad 6. y = x^3 3^{x^3}. \quad 7. y = 2^{\sqrt{x}} \cdot \arccos e^x. \quad 8. y = \frac{x}{4} \cdot \sqrt[4]{\ln 4x}. \quad 9. y = \frac{2 \sin x}{\sqrt{\sin 2x}}.$$

$$10. y = \frac{\sin 3 \cdot \ln^2(x^2 + 4)}{2\sqrt{x}}. \quad 11. y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}. \quad 12. y = \frac{\ln \cos x}{\ln \sin x}. \quad 13. y = \lg \frac{\ln x}{\lg x}.$$

$$14. y = e^{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}. \quad 15. y = \cos x \cdot e^x \cdot \sin^2 x. \quad 16. y = \frac{\sin^2 x}{1 + \operatorname{tgx}} + \frac{\cos^2 x}{1 + \operatorname{ctgx}}. \quad 17. y = \frac{x^2 e^x \operatorname{arctgx}}{\ln^3 x}.$$

$$18. y = \sqrt{x^2 - 1} - \ln \left(\frac{1}{x} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) + e^{2x}. \quad 19. y = 3 \ln(3x - 4\sqrt{1 - 4x^2}) + 8 \arccos 3x.$$

$$20. y = \arcsin \frac{x^{2n} + 1}{x^{2n} - 1}.$$