

Занятие 6. Нелинейные операции над векторами.

1. **Скалярное произведение векторов** – число $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$;

1). проекция вектора на вектор $np_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$; 2). если $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1); \vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$,

то $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$. **Свойства:** 1). $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$; 2). $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;

3). скалярный квадрат $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$, тогда $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a} \cdot \vec{a})}$; 4). $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$;

5). $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$; $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$. **Условие перпендикулярности**

векторов: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$. **Угол между векторами:**

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

2. **Векторное произведение** - вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, определяемый условиями: 1).

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$; 2). \vec{c} перпендикулярен и \vec{a} , и \vec{b} ; 3). вектор \vec{c} направлен

так, что с его конца переход от первого сомножителя \vec{a} ко второму \vec{b} виден как переход против часовой стрелки. **В координатах**, если $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$,

$$\vec{b} = (x_2; y_2; z_2), \text{ то } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\}. \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}. \quad \text{Свойства}$$

векторного произведения: 1). $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$; 2). $\vec{a} \times \vec{a} = 0$; 3). $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;

4). $\vec{i} \times \vec{i} = 0, \vec{j} \times \vec{j} = 0, \vec{k} \times \vec{k} = 0$; $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$; $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$. **Геометрически модуль** векторного произведения – площадь

параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} : $S_{\text{пар}} = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$.

Задачи.

1. Упростить выражение $(2\vec{i} - \vec{j})\vec{j} + (\vec{j} - 2\vec{k})\vec{k} + (\vec{i} - 2\vec{k})^2$.

2. Упростить: $\vec{i} \times (\vec{j} + \vec{k}) - \vec{j} \times (\vec{i} + \vec{k}) + \vec{k} \times (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$.

3. Найти угол между векторами $\vec{a} = (1; 2; 3)$ и $\vec{b} = (6; 4; -2)$.

4. При каком значении m векторы $\vec{a} = m\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - m\vec{k}$ взаимно перпендикулярны?

5. Найти площадь и высоту параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = \vec{i} + 2\vec{k}$.

6. Даны векторы $\vec{a} = (3; -1; -2), \vec{b} = (1; 2; -1)$. Найти $(2\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b})$.

7. Найти вектор \vec{x} , перпендикулярный векторам $\vec{a} = (2; -3; 1)$ и $\vec{b} = (1; -2; 3)$, и удовлетворяющий условию $\vec{x} \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}) = 10$.

8. Вычислить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{c} = 5\vec{p} + 2\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, если $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}, |\vec{q}| = 3, \alpha = \pi/4$.

9. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} - 2\vec{b}$ и $3\vec{a} + 2\vec{b}$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 5$, угол между векторами \vec{a} и \vec{b} равен 45° .

Дополнительные задачи.

1. Дано $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \vec{a} \perp \vec{b}$. Найти $(5\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b})$.
2. Векторы \vec{a} и \vec{b} образуют угол $\varphi = 120^\circ$ и $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5$. Найти $|\vec{a} + \vec{b}|$ и $|\vec{a} - \vec{b}|$.
3. Даны точки $A(3;3;-2), B(0;-3;4), C(0;-3;0), D(0;2;-4)$. Найти $np_{AB} \vec{CD}$.
4. Найти вектор \vec{x} , коллинеарный вектору $\vec{a} = (2;1;-1)$ и удовлетворяющий условию $\vec{x} \cdot \vec{a} = 3$.
5. Доказать: $(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b}) = 3\vec{a} \times \vec{b}$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч.1. Гл. II, пар.3.

1. Упростить: $2\vec{i} \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) + 3\vec{j} \cdot (\vec{i} \times \vec{k}) + 4\vec{k} \cdot (\vec{i} \times \vec{j})$.
2. Даны векторы $\vec{a} = (4;-2;-4)$ и $\vec{b} = (6;-3;2)$. Найти а) $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$; б) $(\vec{a} + \vec{b})^2$.
3. Даны векторы $\vec{a} = (3;-1;-2)$ и $\vec{b} = (1;2;-1)$. Найти координаты $(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}$.
4. Вычислить длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{c} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, если $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{q}| = 3$, угол между векторами \vec{p} и \vec{q} равен $\pi/4$.
5. Векторы \vec{a} и \vec{b} образуют угол $\varphi = \pi/6$. Зная, что $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, вычислить угол между векторами $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$.
6. Даны вершины треугольника $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$, $C(1;3;-1)$. Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC .

Занятие 7. Нелинейные операции над векторами.

Смешанное произведение векторов – число $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$.

Если $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$; $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$; $\vec{c} = (x_3; y_3; z_3)$, то $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

Геометрически – объемы параллелепипеда и пирамиды: $V_{\text{пар}} = \pm \vec{a}\vec{b}\vec{c}$, $V_{\text{пир}} = \pm (1/6)\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. **Условие компланарности векторов:** $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$.

Задачи.

1. Найти объем пирамиды с вершинами $O(0;0;0), A(5;2;0), B(2;5;0), C(1;2;4)$, ее высоту, опущенную на плоскость OAB , длину ребра AB , площадь грани OAB .
2. Лежат ли точки $A(2;-1;-2), B(1;2;1), C(2;3;0), D(5;0;-6)$ в одной плоскости?

3. Найти объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{a} + \vec{c}$, если векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} - единичные и взаимно перпендикулярные.
4. Показать, что векторы $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{c} = -3\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k}$ компланарны.
5. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = 3\vec{m} + 5\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$, $\vec{c} = 2\vec{m} + 7\vec{n}$, если $|\vec{m}| = 1/2$, $|\vec{n}| = 3$, угол между \vec{m} и \vec{n} $\alpha = 135^\circ$.
6. При каком значении λ векторы $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \lambda\vec{k}$, $\vec{b} = (0;1;0)$, $\vec{c} = (3;0;1)$ компланарны?
7. Даны векторы $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$. Найти $\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}$.
8. Вычислить $(\vec{a} - \vec{b})^2$, если $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 4$, угол между векторами равен 135° .

Дополнительные задачи.

1. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = -2\vec{j} + \vec{k}$.
2. Найти $|\vec{c}|$, если $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ и $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, угол между векторами $\varphi = \pi/3$.
3. Объем тетраэдра $v = 5$, три его вершины находятся в точках $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$. Найти координаты четвертой вершины D , лежащей на оси Ox .
4. Показать, что векторы $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + m\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + (m+1)\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + m\vec{k}$ ни при каком m не могут быть компланарными.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч.1. Гл. II, пар.3.

1. Установить компланарность векторов $\vec{a} = (2;3;-1)$, $\vec{b} = (1;-1;3)$, $\vec{c} = (1;9;-11)$.
2. Найти объем пирамиды с вершинами $A(2;3;1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$, $D(-5;-4;8)$, ее высоту, опущенную на плоскость ABC , длину ребра AB , площадь грани ABC .
3. Дан вектор $\vec{a} = 2\vec{m} - \vec{n}$, где $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$, угол между векторами \vec{m} и \vec{n} равен 120° . Найти косинус угла между векторами \vec{a} и \vec{m} .
4. Вычислить длины диагоналей и площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{k} - \vec{j}$ и $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.
5. Найти единичный вектор \vec{d} , зная, что $\vec{d} \perp \vec{a}$, $\vec{d} \perp \vec{b}$, где $\vec{a} = (2;1;1)$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.