

Занятие 9. Вычисление определенного интеграла.

Свойства определенного интеграла.

$$1. \int_a^a f(x)dx = 0. \quad 2. \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

$$3. \text{Аддитивность: } \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

$$4. \text{Линейность: } \int_a^b (c_1 f_1(x) \pm c_2 f_2(x))dx = c_1 \int_a^b f_1(x)dx \pm c_2 \int_a^b f_2(x)dx.$$

$$\text{Формула Ньютона-Лейбница: } \int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Замена переменных в определенном интеграле:

$$\int_a^b f(x)dx = \left\{ \begin{array}{l} x = \varphi(t), dx = \varphi'(t)dt; \\ t = \psi(x); t_1 = \psi(a), t_2 = \psi(b) \end{array} \right\} = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Интегрирование по частям в определенном интеграле:

$$\int_a^b u dv = (uv) \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Задачи.

1. Найти определенные интегралы, применяя формулу Ньютона-Лейбница.

$$1). \int_1^2 \frac{dx}{2\sqrt{x}}. \quad 2). \int_{\pi/2}^{\pi} \sin x dx. \quad 3). \int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x dx. \quad 4). \int_0^{1/2} \frac{dx}{4x^2 + 1}. \quad 5). \int_0^1 (\sqrt[3]{x} + \sqrt{x})\sqrt[3]{x^2} dx.$$

2. Найти определенные интегралы с помощью замены переменной.

$$1). \int_0^{28/3} \frac{dx}{\frac{3}{4}x + 9}. \quad 2). \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}. \quad 3). \int_0^{\pi/2} \cos x \sin^4 x dx. \quad 4). \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(x+1)^3}.$$

$$5). \int_{-1}^0 x\sqrt{3x+4} dx. \quad 6). \int_0^{\ln 4} \sqrt{e^x - 1} dx. \quad 7). \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x}. \quad 8). \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$$

3. Проинтегрировать по частям.

$$1). \int_0^1 x e^{2x} dx. \quad 2). \int_1^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x dx. \quad 3). \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x dx}{\sin^2 x}.$$

Дополнительные задачи.

Найти $\int_0^2 f(x) dx$, где $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1, гл. 10, § 1.

1. Найти определенные интегралы, применяя формулу Ньютона-Лейбница.

$$1). \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad 2). \int_1^8 \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}. \quad 3). \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x dx. \quad 4). \int_{\ln 2}^{\ln 4} (e^x + 1) dx.$$

$$5). \int_0^1 (\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}) \sqrt{x} dx.$$

2. Найти определенные интегралы с помощью замены переменной.

$$1). \int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{ctg} 2x dx. \quad 2). \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx. \quad 3). \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx. \quad 4). \int_{1/e}^1 \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx.$$

$$5). \int_{-1}^7 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}. \quad 6). \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}. \quad 7). \int_0^{\ln 2} \frac{dz}{e^z + 1}. \quad 8). \int_1^3 x^3 \sqrt{x^2-1} dx.$$

3. Проинтегрировать по частям.

$$1). \int_0^{\pi/3} x \sin x dx. \quad 2). \int_1^e x \ln x dx. \quad 3). \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x dx}{\cos^2 x}.$$