

Занятие 14. Несобственные интегралы.

Несобственные интегралы I рода – это интегралы с бесконечными пределами:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x)dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(x)dx.$$

Если пределы в правых частях равенств существуют и конечны, то несобственные интегралы называются **сходящимися**, в противном случае интегралы расходятся.

Несобственные интегралы II рода – это интегралы, имеющие бесконечные разрывы на отрезке интегри-

рования: при разрыве в нижнем пределе $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$, при разрыве в верхнем пределе

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \quad \text{при разрыве в точке } c \in [a, b] \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Задачи.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

- 1). $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$. 2). $\int_0^\infty \sin x dx$. 3). $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2 + 1}$. 4). $\int_0^1 \frac{dx}{x^4 + x^2}$. 5). $\int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{4 - x^2}}$. 6). $\int_0^2 \frac{x dx}{(x^2 - 1)^{4/5}}$.
7). $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2 + 6x + 11}$. 8). $\int_e^\infty \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$. 9). $\int_{1/3}^{2/3} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2 - 1}}$. 10). $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

Дополнительные задачи.

Вычислить несобственный интеграл: $\int_0^\infty \frac{\arctg(x-1)}{\sqrt[3]{(x-1)^4}} dx$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч.1. Гл.X, пар.2.

- 1). $\int_0^\infty x e^{-x^2} dx$. 2). $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{4 + x^2}$. 3). $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$. 4). $\int_0^1 x \ln^2 x dx$. 5). $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.
6). $\int_3^5 \frac{dx}{(x-3)(5-x)}$. 7). $\int_0^\infty x e^{-x} dx$. 8). $\int_1^\infty \frac{\arctg x}{x^2} dx$. 9). $\int_0^{1/e} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$.