

## Занятие 21. Комплексные числа.

**Алгебраическая форма числа:**  $z = x + yi$ ,  $x = \operatorname{Re} z$  - действительная часть,  $y = \operatorname{Im} z$  - мнимая часть,  $i = \sqrt{-1}$  - мнимая единица,  $i^2 = -1$ . **Сопряженное число**  $\bar{z} = x - iy$ . **Арифметические действия** над комплексными числами в алгебраической форме проводятся как действия над алгебраическими выражениями. При умножении  $i^2 = -1$ , при делении дробь умножается и делится на число, комплексно сопряженное знаменателю дроби:  $z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2$ . **Тригонометрическая форма**

**числа:**  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$  - модуль числа;  $\cos \varphi = \frac{x}{r}$ ,  $\sin \varphi = \frac{y}{r}$ . Отсюда

$\varphi = \arg z$  - аргумент числа. **Показательная (экспоненциальная) форма числа:**  $z = re^{i\varphi}$ . **Формула**

**Эйлера:**  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ . **Действия над комплексными числами. Произведение:**

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)); \quad \text{Деление:} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

**Возведение в степень (формула Муавра):**  $z^n = (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ .

**Извлечение корня:**

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

**Задачи.**

1. Вычислить. 1).  $\sqrt{-64}$ . 2).  $\sqrt{-8}$ .
2. Решить уравнения. 1).  $x^2 - 4x + 8 = 0$ ; 2).  $3x^2 - x + 2 = 0$ .
3. Вычислить. 1).  $(1 + 2i) + (2 - i)$ . 2).  $i^2 + i^3 + i^4 + i^5$ . 3).  $(\sqrt{2} - i)(2 + i\sqrt{2})$ . 4).  $\frac{2 - 3i}{4 - 2i} + \frac{1 - 3i}{2i}$ .
4. Записать в тригонометрической и показательной форме. 1).  $z = 2 + 2i$ . 2).  $z = -1 + i\sqrt{3}$ . 3).  $z = -3 \left( \cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5} \right)$ .
5. Вычислить. 1).  $(-1 - i\sqrt{3})^{15}$ . 2).  $\left( \frac{i^{16} + 3}{i^6 + 3} \right)^5$ . 3).  $\left( \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9} \right) \right)^{12}$ .
6. Найти значение функции и ее производной в заданной точке. 1).  $f(z) = z^2 + 2i$ ,  $z_0 = 2 + i$ . 2).  $f(z) = 3z^2$ ,  $z_0 = 3 + 2i$ .
7. Найти все значения комплексного числа. 1).  $\sqrt[3]{-8}$ . 2).  $\sqrt[4]{-16}$ . 3).  $\sqrt[5]{1 + i}$ .
8. Найти расстояние между точками. 1).  $1 - 6i$  и  $2i$ . 2).  $1 + 4i$  и  $3 - 2i$ .

**Дополнительные задачи.**

Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} (2 + i)x + (2 - i)y = 6, \\ (3 + 3i)x + (3 - 2i)y = 8. \end{cases}$$

**Задачи для самостоятельной работы.** Данко, ч.2, гл.3, пар.7, п.1.

1. Вычислить. 1).  $\sqrt{-36}$ . 2).  $\sqrt{-12}$ . 3).  $(-3 + 3i)(-3 - 3i)$ . 4).  $\frac{2 - 5i}{4 + i}$ . 5).  $\frac{1 + i}{(\sqrt{3} + i)(1 + i\sqrt{3})}$ .
2. Решить уравнения. 1).  $x^2 - 2x + 10 = 0$ ; 2).  $2x^2 - 3x + 2 = 0$ .
3. Записать в тригонометрической форме. 1).  $z = 1 - i$ . 2).  $z = \sqrt{3} + i$ .
3. Найти значение функции и ее производной в заданной точке. 1).  $f(z) = 4z^2 - i$ ,  $z_0 = 1 + 5i$ . 2).  $f(z) = 2z^3$ ,  $z_0 = i$ .
7. Найти все значения комплексного числа. 1).  $\sqrt[3]{-27}$ . 2).  $\sqrt[4]{-1}$ . 3).  $\sqrt[5]{1 - i}$ .