

Занятие 23. Метод неопределенных коэффициентов для линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Метод неопределенных коэффициентов. Метод применим только для линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами и со специальной правой частью (квазимногочленом)

$f(x) = P_n(x)e^{kx}$, где $k = \alpha + \beta i$ - показатель правой части. Уравнение вида $y'' + py' + qy = P_n(x)e^{kx}$, где коэффициенты p, q - постоянные величины, называется **линейным неоднородным**. Общее решение имеет вид: $y = \bar{y} + \tilde{y}$, где \bar{y} - общее решение линейного однородного уравнения; \tilde{y} - частное решение линейного неоднородного уравнения, которое составляется по виду правой части и зависит от значений корней λ_1, λ_2 характеристического уравнения. **а).** Если $f(x) = P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, то $\tilde{y} = Q_n(x) \cdot x^r$, где $Q_n(x)$ - многочлен той же степени, что и $P_n(x)$ только с неопределенными коэффициентами; r - количество корней характеристического уравнения, равных 0: $r = 0, 1$. **б).** Если $f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$, то $\tilde{y} = Q_n(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot x^r$, где r - количество корней характеристического уравнения, равных α : $r = 0, 1, 2$. **в).** Если $f(x) = a \cos \beta x + b \sin \beta x$, то $\tilde{y} = (A \cos \beta x + B \sin \beta x) \cdot x^r$, где r - количество корней характеристического уравнения, равных $i\beta$: $r = 0, 1$. **г).** Если $f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + P_m(x) \sin \beta x)$, то $\tilde{y} = e^{\alpha x} (Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x) \cdot x^r$, где $Q_1(x), Q_2(x)$ - многочлены степени s , $s = \max(n, m)$; r - количество корней характеристического уравнения, равных $\alpha + i\beta$: $r = 0, 1$.

Принцип суперпозиции. Если $y_1(x)$ - решение уравнения $y'' + py' + qy = f_1(x)$, $y_2(x)$ - решение уравнения $y'' + py' + qy = f_2(x)$ (p и q в обоих уравнениях одни и те же), то сумма $y_1(x) + y_2(x)$ - решение уравнения $y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$.

Задачи.

1. Указать виды частных решений для данных неоднородных уравнений.

1). $y'' - 2y' + 2y = (1 + \sin x)e^x$. 2). $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x} + 17 \sin 2x$.

3). $y'' + 2y' + y = xe^x + \frac{1}{2} \cos x$.

2. Найти общие решения линейных неоднородных уравнений.

1). $y'' - 2y' = x^2 - 1$. 2). $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$. 3). $y'' - 2y' = 3x + 2xe^x$. Найти решение задачи

Коши с начальными условиями $y(0) = 1, y'(0) = -\frac{3}{4}$. 4). $y'' - 2y' - 8y = e^x - 8 \cos 2x$.

5). $y'' - 3y' = x + \cos x$. 6). $y'' + 9y = 2x \sin x + xe^{3x}$. 7). $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + \frac{x}{2}$.

Дополнительные задачи.

Решить уравнение $y'' - 2y' + 2y = 4 \cos x \cos 3x + 6 \sin^2 x$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч.2, гл.4, пар.3, п.4.

1. Указать виды частных решений для данных неоднородных уравнений.

1). $y'' - y' - 2y = e^x + e^{-2x}$. 2). $y'' - y' = x + \sin x$. 3). $y'' - 3y' + 2y = x + \cos x + xe^x$.

Найти общие решения линейных неоднородных уравнений.

1). $y'' - 3y' = 18x^2 - 10 \cos x$. 2). $y'' - 2y' + y = 2 + e^x \sin x$. 3). $y'' - y' - 2y = 4x - 2e^x$.

4). $y'' + 4y = -8 \sin 2x + 32 \cos 2x + 4e^{2x}$. 5). $y'' + 25y = \sin 5x + 10(x-1)e^{5x}$.

6). $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$. 7). $y'' - 7y' = (x-1)^2 + e^{7x}$.