

**Занятие 5. Замена переменной в неопределенном интеграле.**  
**Подведение функции под знак дифференциала.**

**Подведение под знак дифференциала.** Если подынтегральное выражение содержит функцию  $g(x)$  и ее производную, то эту функцию можно подвести под знак дифференциала:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(g(x))d(g(x)) = \{t = g(x)\} = \int f(t)dt.$$

**Таблица основных дифференциалов.**

$$dx = \frac{1}{a}d(ax+b); \quad xdx = \frac{1}{2}d(x^2) = \frac{1}{2}d(x^2+b) = \frac{1}{2a}d(ax^2+b); \quad x^2dx = \frac{1}{3}d(x^3);$$

$$x^3dx = \frac{1}{4}d(x^4); \quad x^n dx = \frac{1}{n+1}d(x^{n+1}); \quad \frac{dx}{x^2} = -d\left(\frac{1}{x}\right); \quad \frac{dx}{x} = d(\ln x);$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x}); \quad a^x dx = \frac{1}{\ln a}d(a^x); \quad e^x dx = d(e^x); \quad \sin x dx = -d(\cos x);$$

$$\cos x dx = d(\sin x); \quad \frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x); \quad \frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x); \quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x);$$

$$\frac{dx}{1+x^2} = d(\operatorname{arctg} x); \quad \sin 2x dx = d(\sin^2 x) = -d(\cos^2 x).$$

Если интеграл  $\int f(x)dx$  является табличным:  $\int f(x)dx = F(x) + C$ , то  
**интеграл от функции линейного аргумента**

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \quad (a \neq 0). \quad \text{Здесь } dx = \frac{1}{a}d(ax+b).$$

**Задачи.**

1. Найти неопределенные интегралы от функции линейного аргумента.

$$1). \int \frac{dx}{1-10x}. \quad 2). \int (e^{-x} + (2-x)^7)dx. \quad 3). \int \frac{dx}{(3x+4)^4}. \quad 4). \int \sqrt{4x-3}dx.$$

$$5). \int \sin(1-3x)dx. \quad 6). \int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{4}}.$$

2. Вычислить неопределенные интегралы, используя формулу

$$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln|f(x)| + C.$$

$$1). \int \frac{x dx}{3x^2 - 2}. \quad 2). \int \frac{\cos 3x dx}{3 + \sin 3x}. \quad 3). \int \frac{x^4 - 4x + 1}{x^5 - 10x^2 + 5x} dx. \quad 4). \int \frac{e^{2x} dx}{1 - 3e^{2x}}.$$

$$5). \int \frac{\cos x dx}{\sin x + 3}.$$

3. Найти неопределенные интегралы.

$$1). \int x^2 \sin(x^3 + 1) dx. \quad 2). \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1 + 2 \cos x}}. \quad 3). \int \frac{x + 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx. \quad 4). \int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 + 1} dx.$$

$$5). \int \frac{\ln^5 x}{x} dx. \quad 6). \int \frac{3^{1/x} dx}{x^2}.$$

**Дополнительные задачи.**

Найти неопределенные интегралы.

$$1). \int \frac{1 + x - x^2}{\sqrt{(1 - x^2)^3}} dx. \quad 2). \int x^2 \operatorname{ctg}(x^3 - 1) dx.$$

**Задачи для самостоятельной работы.** Данко, ч. 1, гл. 9, § 1, п. 2.

1. Найти неопределенные интегралы от функции линейного аргумента.

$$1). \int \frac{dx}{7x - 5}. \quad 2). \int (5x - 1)^{19} dx. \quad 3). \int \frac{dx}{(a - bx)^3}. \quad 4). \int \sqrt[3]{4x - 3} dx.$$

$$5). \int \frac{dx}{\sqrt{3 + 5x}}. \quad 6). \int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{3}}.$$

2. Вычислить неопределенные интегралы, используя формулу

$$\int \frac{f'(x) dx}{f(x)} = \ln |f(x)| + C.$$

$$1). \int \frac{x^3 dx}{2x^4 + 7}. \quad 2). \int \operatorname{tg} x dx. \quad 3). \int \frac{x^3 dx}{2x^4 + 7}. \quad 4). \int \frac{\sin x dx}{\cos x + 1}. \quad 5). \int \frac{dx}{x(1 + \ln x)}.$$

3. Найти неопределенные интегралы.

$$1). \int e^{x^3} x^2 dx. \quad 2). \int \frac{1 - 2 \sin x}{\cos^2 x} dx. \quad 3). \int \sqrt[4]{1 - 6x^5} x^4 dx. \quad 4). \int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx.$$

$$5). \int \frac{x - \sin \frac{1}{x}}{x^2} dx. \quad 6). \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$