

## Занятие 7. Интегрирование квадратных трехчленов и рациональных дробей.

Интегралы, содержащие квадратный трехчлен  $ax^2 + bx + c$  в знаменателе, находятся выделением полного квадрата из трехчлена:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \end{aligned}$$

и линейной заменой переменной  $t = x + \frac{b}{2a}$ .

Если знаменатель  $Q(x)$  **правильной** дроби  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  разлагается на множители  $Q(x) = (x-a)^n(x^2+px+q)^m$  (квадратный трехчлен  $x^2+px+q$  не имеет действительных корней), то данную дробь можно представить виде суммы **простых дробей**:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \dots + \frac{B_mx+C_m}{(x^2+px+q)^m}.$$

**Разложение квадратного трехчлена:**  $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$ , где  $x_1, x_2$  – корни трехчлена.

### Задачи.

1. Найти неопределенные интегралы, содержащие квадратный трехчлен.

$$\begin{aligned} 1). \int \frac{dx}{x^2 + 2x - 8}. \quad 2). \int \frac{dx}{\sqrt{12 - 4x - x^2}}. \quad 3). \int \frac{4x + 5}{x^2 - 3x + 4} dx. \\ 4). \int \frac{xdx}{\sqrt{3 - 4x - 2x^2}}. \quad 5). \int \frac{xdx}{\sqrt{x - 2x^2}}. \end{aligned}$$

2. Найти неопределенные интегралы от рациональных дробей.

$$1). \int \frac{x-5}{(x-2)(x-3)} dx. \quad 2). \int \frac{x+5}{(x+2)^2} dx. \quad 3). \int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}.$$

$$4). \int \frac{x^3 + x + 1}{x(x^2 + 1)} dx. \quad 5). \int \frac{dx}{x^4 + x^2}. \quad 6). \int \frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx.$$

**Дополнительные задачи.**

1. Найти неопределенные интегралы, содержащие квадратный трехчлен.

$$1). \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^2 x + 4 \cos x + 1}}. \quad 2). \int \frac{\ln x dx}{x \sqrt{1 - 4 \ln x - \ln^2 x}}.$$

2. Найти неопределенный интеграл от рациональной дроби:

$$\int \frac{(5x - 1) dx}{x^3 - 3x - 2}.$$

**Задачи для самостоятельной работы.** Данко, ч. 1, гл. 9, § 2, пп. 1, 2.

1. Найти неопределенные интегралы, содержащие квадратный трехчлен.

$$1). \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x - 1}}. \quad 2). \int \frac{3x - 2}{3x - 2x^2 + 2} dx. \quad 3). \int \frac{2x + 3}{\sqrt{2x^2 + 3x - 2}}.$$

$$4). \int \frac{xdx}{x^4 - 4x^2 + 3}. \quad 5). \int \frac{x + 1}{x - x^2} dx.$$

2. Найти неопределенные интегралы от рациональных дробей.

$$1). \int \frac{6x^2 + 2x - 2}{x(x^2 + x - 2)} dx. \quad 2). \int \frac{(x + 2) dx}{x^3 - 2x^2}. \quad 3). \int \frac{dx}{x^4 - 1}. \quad 4). \int \frac{3x^2 - x + 1}{1 - x^3} dx.$$

$$5). \int \frac{x^2 dx}{(x + 2)^2 (x + 1)}. \quad 6). \int \frac{(3x + 2) dx}{(x + 2)(x^2 + 2x + 2)}.$$