Разбор задач по теме «Производная»

1. Найти первую производную от функций:

а) $y = \dfrac{x+5}{\sqrt{x^2-1}}$.

Решение. Применим правило дифференцирования частного.

$$y' = \frac{(x+5)' \cdot \sqrt{x^2-1} - (x+5)\cdot\left(\sqrt{x^2-1}\right)'}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2} == \frac{1\cdot\sqrt{x^2-1} - (x+5)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot 2x}{x^2-1}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-1} - \dfrac{x(x+5)}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} == \frac{\dfrac{x^2-1-x^2-5x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} = \frac{-5x-1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}.$$

б) $y = \dfrac{\sin^3 x}{1+\cos x}$.

Решение. Применим правило дифференцирования частного.

$$y' = \frac{(\sin^3 x)' \cdot (1+\cos x) - \sin^3 x \cdot (1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2} =$$

$$= \frac{3\,sin^2 x\cdot\cos x\cdot(1+\cos x) - \sin^3 x\cdot(-\sin x)}{(1+\cos x)^2} =$$

$$= \frac{3\,sin^2 x\cdot\cos x + 3\,sin^2 x\cdot\cos^2 x + sin^4 x}{(1+\cos x)^2}.$$

в) $y = \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{x^2}{\sqrt{3}}$.

Решение. Дифференцирование сложной функции.

$$y' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{3}}\right)^2}}\cdot\frac{2x}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^4}{3}}}\cdot\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{3-x^4}{3}}}\cdot\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3-x^4}}\cdot\frac{x}{\sqrt{3}} == \frac{x}{\sqrt{3-x^4}}.$$

г) $y = \ln^3(1+\cos x)$.

Решение. Дифференцирование сложной функции.

$$y' = 3\ln^2(1+\cos x)\cdot\frac{1}{1+\cos x}\cdot(-\sin x) = \frac{-3\sin x\cdot ln^2(1+\cos x)}{1+\cos x}.$$

д) $arctg\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$.

Решение. Дифференцирование функции, заданной неявно.

$$\frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{y'x-y}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot(2x+2y\cdot y')$$

$$\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{y'x-y}{x^2} = \frac{2\cdot(x+yy')}{2\cdot(y^2+x^2)}$$

$$\frac{xy'-y}{y^2+x^2} = \frac{x+yy'}{y^2+x^2}$$

$$xy' - y = x + yy'$$
$$xy' - yy' = x + y$$
$$(x - y) \cdot y' = x + y$$
$$y' = \frac{x + y}{x - y}.$$

е) $y = (tg\sqrt{x})^{-\sin x^2}$.

Решение. Дифференцирование показательно-степенной функции по формуле $u^v = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'$.

$$y' = -\sin x^2 \cdot \left(tg\,\sqrt{x}\right)^{-\sin x^2 - 1} \cdot \left(tg\,\sqrt{x}\right)' + \left(tg\,\sqrt{x}\right)^{-\sin x^2} \cdot \ln tg\,\sqrt{x} \cdot (-\sin x^2)' =$$
$$= -\sin x^2 \cdot (tg\,\sqrt{x})^{-\sin x^2 - 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - (tg\,\sqrt{x})^{-\sin x^2} \cdot \ln tg\,\sqrt{x} \cdot$$
$$\cdot \cos x^2 \cdot 2x.$$

ж) $y = \ln\left(e^{2x} + \sqrt{e^{2x} + 4}\right)$.

Решение. Дифференцирование сложной функции.

$$y' = \frac{1}{e^{2x} + \sqrt{e^{2x} + 4}} \cdot \left(e^{2x} \cdot 2 + \frac{1}{2\sqrt{e^{2x} + 4}} \cdot e^{2x} \cdot 2\right) =$$
$$= \frac{1}{e^{2x} + \sqrt{e^{2x} + 4}} \cdot \left(e^{2x} \cdot 2 + \frac{1}{\sqrt{e^{2x} + 4}} \cdot e^{2x}\right).$$

з) $\begin{cases} x = e^t \cdot \cos t, \\ y = e^t \cdot \sin t. \end{cases}$

Решение. Дифференцирование функции, заданной параметрически.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(e^t)' \cdot \sin t + e^t \cdot (\sin t)'}{(e^t)' \cdot \cos t + e^t \cdot (\cos t)'} = \frac{e^t \cdot \sin t + e^t \cdot \cos t}{e^t \cdot \cos t + e^t \cdot (-\sin t)} = \frac{e^t \cdot \sin t + e^t \cdot \cos t}{e^t \cdot \cos t - e^t \cdot \sin t} =$$
$$= \frac{e^t \cdot (\sin t + \cos t)}{e^t \cdot (\cos t - \sin t)} = \frac{\cos t + \sin t}{\cos t - \sin t}.$$

2. Вычислить предел, применяя правило Лопиталя.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x^2 - 1}{\sin x + x} = \left(\frac{0}{0}\right).$$

Решение.

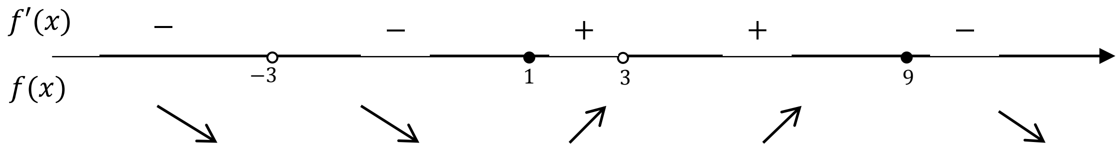
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x^2 - 1}{\sin x - x} = \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - x^2 - 1)'}{(\sin x - x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 2x}{\cos x - x} = \frac{e^0 - 2}{\cos 0 - 1} = \frac{1 - 2}{1 - 1} == \frac{-1}{0} = \infty.$$

3. Найти промежутки монотонности функции $y = \frac{x-5}{x^2-9}$.

Решение. Область допустимых значений данной функции $x \neq \pm 3$. Найдем первую производную и приравняем ее к нулю

$$y' = \frac{(x-5)' \cdot (x^2 - 9) - (x - 5) \cdot (x^2 - 9)'}{(x^2 - 9)^2} = \frac{1 \cdot (x^2 - 9) - (x - 5) \cdot 2x}{(x^2 - 9)^2} =$$
$$= \frac{x^2 - 9 - 2x^2 + 10x}{(x^2 - 9)^2} = \frac{-x^2 + 10x - 9}{(x^2 - 9)^2} = 0.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 10x + 9 = 0, \\ x^2 - 9 \neq 0. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 9, \\ x \neq 3, \\ x \neq -3. \end{array}\right.$$



Ответ: при $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 1) \cup (9; +\infty)$ функция убывает,
при $x \in (1; 3) \cup (3; 9)$функция возрастает.

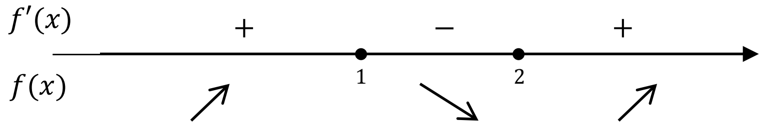
4. Исследовать на экстремум функцию $y = (x-6)\sqrt{x^2+4}$.

Решение. Область допустимых значений $x \in R$. Найдем первую производную и приравняем ее к нулю:

$$y' = (x-6)'\sqrt{x^2+4} + (x-6)\left(\sqrt{x^2+4}\right)' = 1 \cdot \sqrt{x^2+4} + (x-6) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}} \cdot 2x =$$

$$= \sqrt{x^2+4} + \frac{x^2-6x}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{x^2+4+x^2-6x}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{2x^2-6x+4}{\sqrt{x^2+4}} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \;\Rightarrow \left[\begin{matrix} x_1 = 2, \\ x_2 = 1. \end{matrix}\right.$$



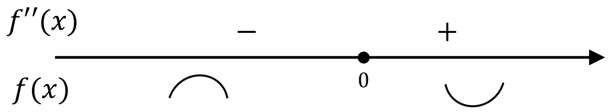
Ответ: $x = 1$ max; $x = 2$ min; $y_{max}(1) = -5\sqrt{5}$; $y_{min}(2) = -8\sqrt{2}$.

5. Найти точки перегиба функции $y = x^5 + 10x + 1$.

Решение. Вычислим производную второго порядка и приравняем ее к нулю

$y' = 5x^4 + 10$,

$y'' = 5 \cdot 4x^3 = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$.



Ответ:$(0; 1)$ – точка перегиба заданной функции.

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = x^3 - 12x^2 + 21x - 14$$

на отрезке $[0; 5]$.

Решение. Вычислим производную $y' = 3x^2 - 12 \cdot 2x + 21 = 3x^2 - 24x + 21$. Найдем решение уравнения

$$3x^2 - 24x + 21 = 0 \;\Rightarrow x^2 - 8x + 7 = 0 \;\Rightarrow \left[\begin{matrix} x_1 = 1, \\ x_2 = 7. \end{matrix}\right.$$

Так как $x_2 = 7$ не принадлежит отрезку $[0; 5]$, найдем значения функции на концах отрезка и при $x_1 = 1$.

$y(0) = -14$,

$y(5) = 5^3 - 12 \cdot 5^2 + 21 \cdot 5 - 14 = 125 - 300 + 105 - 14 = -84$,

$y(1) = 1^3 - 12 \cdot 1^2 + 21 \cdot 1 - 14 = 1 - 12 + 21 - 14 = -4$.

Ответ: $y = -4$– наибольшее значение функции,

$y = -84$ – наименьшее значение функции.

7. Построить графики функций:

а) $y = x^3 - 3x - 2$.

Решение.

1) Область допустимых значений $x \in (-\infty; +\infty)$.

2) $y(-x) = (-x)^3 - 3(-x) - 2 = -x^3 - 3x - 2 \neq y(x)$

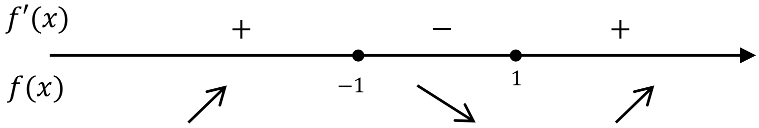
Функция ни четная, ни нечетная.

3) Точки пересечения с осями координат:

Если $x = 0$,то $y = -2$; если $y = 0$,то $x = -1, x = 8$.

4) Исследуем функцию на экстремум:

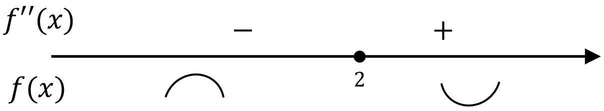
$$y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -1, \\ x_2 = 1. \end{array}\right.$$



$x = -1$ max; $x = 1$ min; $y_{max}(-1) = 0$; $y_{min}(1) = -4$.

5) Найдем точки перегиба функции:

$$y'' = 6x = 0 \Rightarrow x = 2.$$

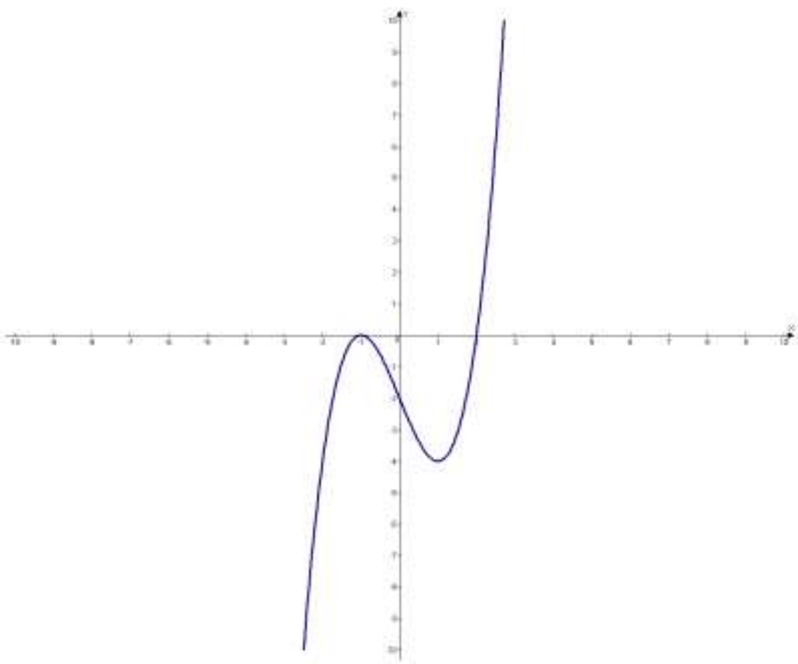


$(0; -2)$ – точка перегиба.

6) Найдем наклонную асимптоту:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 3x - 2}{x} = \infty.$$

Наклонных асимптот нет.



б) $y = \dfrac{x^3}{4 - x^2}$.

Решение.

1) ОДЗ:$x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty). \Longrightarrow x = \pm 2$ - вертикальные асимптоты.

2)

$$y(-x) = \frac{(-x)^3}{4 - (-x)^2} = \frac{-x^3}{4 - x^2} = -y(x).$$

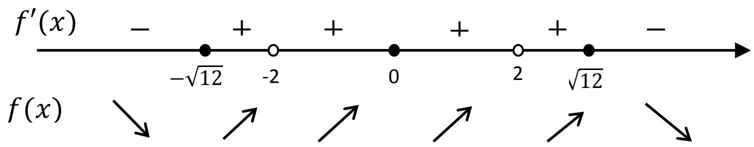
Функция нечетная, график симметричен относительно начала координат.

3) Точки пересечения с осями координат: $x = 0, y = 0$.

4) Исследуем функцию на экстремум:

$$y' = \frac{3x^2(4 - x^2) - x^3 \cdot (-2x)}{(4 - x^2)^2} = \frac{12x^2 - 3x^4 + 2x^4}{(4 - x^2)^2} = \frac{12x^2 - x^4}{(4 - x^2)^2} = \frac{(12 - x^2) \cdot x^2}{(4 - x^2)^2} = 0.$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 0, x_2 = 2\sqrt{3}, x_3 = -2\sqrt{3}, \\ x \neq \pm 2. \end{array}\right.$$



$x_{max} = 2\sqrt{3},\ x_{min} = -2\sqrt{3},\ y_{max}\left(2\sqrt{3}\right) = -3\sqrt{3},\ y_{max}\left(-2\sqrt{3}\right) = 3\sqrt{3}.$

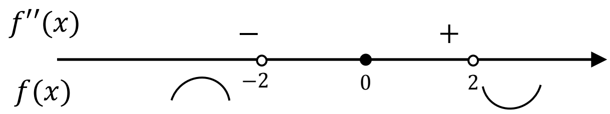
5) Найдем точки перегиба функции:

$$y'' = \left(\frac{12x^2 - x^4}{(4 - x^2)^2}\right)' = \frac{(24x - 4x^3) \cdot (4 - x^2)^2 - (12x^2 - x^4) \cdot 2 \cdot (4 - x^2) \cdot (-2x)}{(4 - x^2)^4} =$$

$$= \frac{(4 - x^2) \cdot \left((24x - 4x^3) \cdot (4 - x^2) + (12x^2 - x^4) \cdot 4x\right) =}{(4 - x^2)^4}$$

$$= \frac{96x - 16x^3 - 24x^3 + 4x^5 + 48x^3 - 4x^5}{(4 - x^2)^3} = \frac{96x + 8x^3}{(4 - x^2)^3} == \frac{8x \cdot (x^2 + 12)}{(4 - x^2)^3}$$

$$= 0 \ \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x \neq \pm 2. \end{array}\right.$$



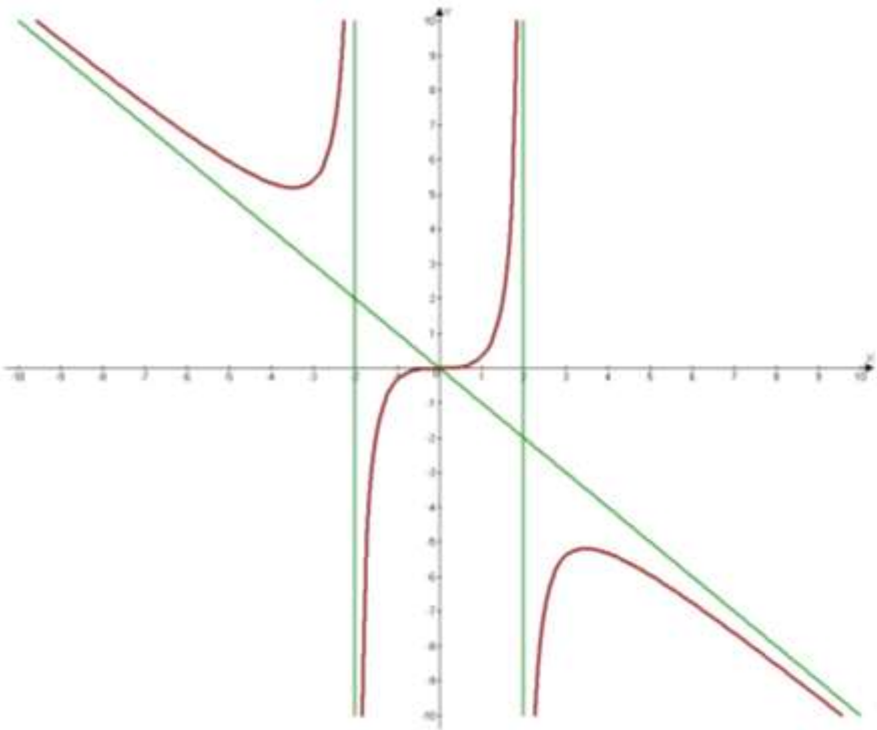
$x = 0$ - точка перегиба, $y(0) = 0$.

6) Найдем наклонную асимптоту:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{(4 - x^2) \cdot x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{4x - x^3} = -1,$$

$$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3}{4 - x^2} + x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 4x - x^3}{4 - x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{4x}{4 - x^2} = 0.$$

$y = -x$ наклонная асимптота.



в) $y = \ln(x^2 - 3)$.

Решение.

1) ОДЗ: $x\epsilon\left(-\infty; -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; +\infty\right), \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$ – вертикальные асимптоты.

2) $y(-x) = \ln((-x)^2 - 3) = \ln(x^2 - 3) = y(x)$ функция четная, график симметричен относительно оси Oy.

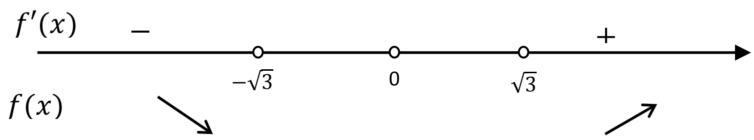
3) Точки пересечения с координатными осями:

Если $y = 0,$ то $\ln(x^2 - 3) = 0, \quad \Rightarrow x^2 - 3 = 1 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2;$

если $x = 0$, то y не существует.

4) Исследуем функцию на экстремум:

$$y' = \frac{2x}{x^2-3} = 0 \;\Rightarrow\; x = 0.$$



Точек экстремума нет.

5) Найдем точки перегиба функции:

$$y'' = \left(\frac{2x}{x^2-3}\right)' = \frac{2\cdot(x^2-3) - 2x\cdot 2x}{(x^2-3)^2} = \frac{2x^2 - 6 - 4x^2}{(x^2-3)^2} = \frac{-2x^2 - 6}{(x^2-3)^2} = \frac{-2(x^2+3)}{(x^2-3)^2} < 0.$$

Точек перегиба нет, график функции выпуклый.

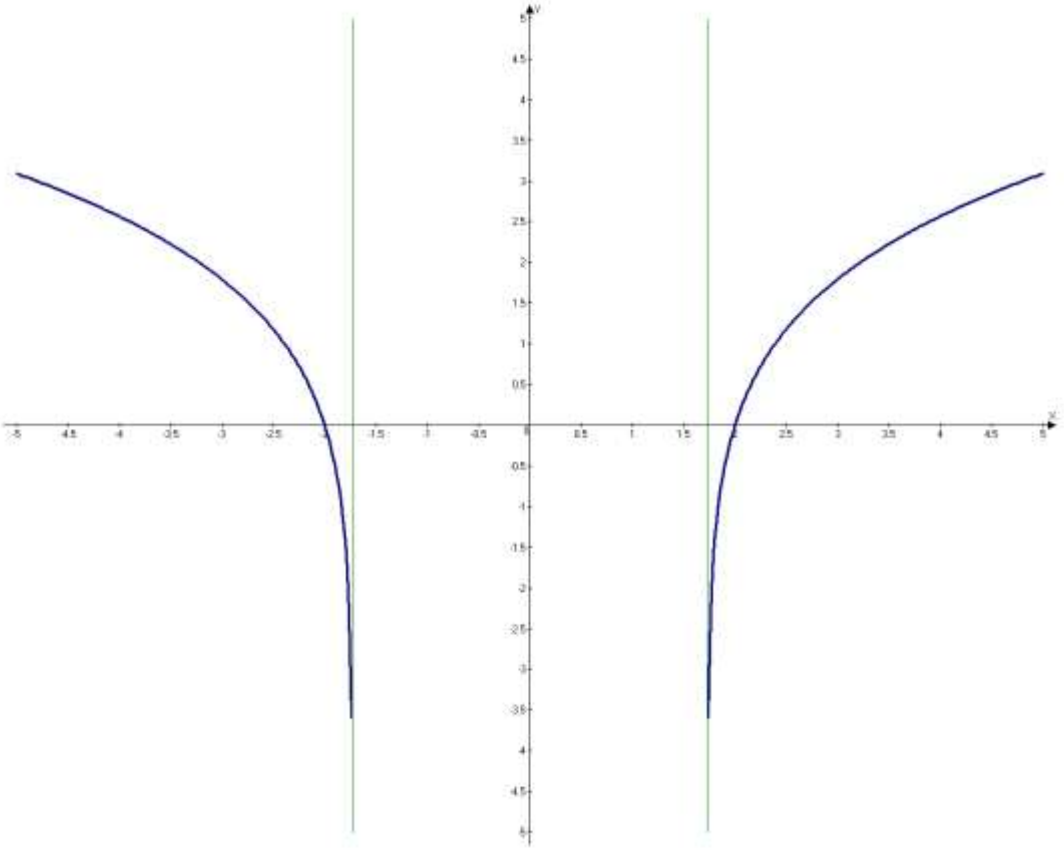
6) Найдем наклонную асимптоту:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2-3)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{(\ln(x^2-3))'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2-3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(2x)'}{(x^2-3)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{2x} = 0.$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}\ln(x^2-3) = \infty.$$

Наклонных асимптот нет.



8. По определению найти производную функции$y = \sqrt{x^2 - 4}$.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(x + \Delta x)^2 - 4} - \sqrt{x^2 - 4}}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(x + \Delta x)^2 - 4} - \sqrt{x^2 - 4}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{(x + \Delta x)^2 - 4} + \sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{(x + \Delta x)^2 - 4} + \sqrt{x^2 - 4}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - 4 - (x^2 - 4)}{\Delta x \cdot \left(\sqrt{(x + \Delta x)^2 - 4} + \sqrt{x^2 - 4}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2 - 4 - x^2 + 4}{\Delta x \cdot \left(\sqrt{(x + \Delta x)^2 - 4} + \sqrt{x^2 - 4}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x \cdot \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x \cdot \left(\sqrt{(x + \Delta x)^2 - 4} + \sqrt{x^2 - 4}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \cdot (2x + \Delta x)}{\Delta x \cdot \left(\sqrt{(x + \Delta x)^2 - 4} + \sqrt{x^2 - 4}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x + \Delta x}{\sqrt{(x + \Delta x)^2 - 4} + \sqrt{x^2 - 4}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x^2 - 4}} = \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{x^2 - 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}.$$

Ответ: $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$.

Приложение 2.

1. **Производная** от функции $y = f(x)$ в точке $x: y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
2. **Дифференциал функции** $y = f(x)$: $dy = y'dx$.
3. **Правила дифференцирования:**

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
2. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$.
3. $(c \cdot u)' = c \cdot u'$.
4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.
5. $\left(f(\varphi(x))\right)' = f'^{(\varphi)} \cdot \varphi'^{(x)}$.

4. **Производные основных элементарных функций:**

1. $c' = 0$.
2. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$; $x' = 1$; $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$.
3. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$; $\left(e^x\right)' = e^x$.
4. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$; $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$.
5. $\left(\sin x\right)' = \cos x$.
6. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$.
7. $\left(tgx\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
8. $\left(ctgx\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
9. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
10. $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
11. $\left(arctgx\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.
12. $\left(arcctgx\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

5. Производная показательно-степенной функции:

$$u^v = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'.$$

6. Производная функции, заданной параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$: $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.
7. Правило Лопиталя: $\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to x_o} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_o} \frac{f''(x)}{g''(x)}$.

8. Схема исследования функции:

1. Найти область определения функции, множество значений (по возможности), точки разрывов, вертикальные асимптоты.
2. Исследовать функцию на четность и нечетность, периодичность.
3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
4. Исследовать функцию на монотонность, найти точки экстремума.
5. Найти точки перегиба, определить направление выпуклости графика функции.
6. Найти наклонные асимптоты графика функции.
7. Построить график функции.