ФГАОУ ВПО СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. К. АММОСОВА
Институт математики и информатики
Кафедра алгебры и геометрии

конспект лекций

«Векторные пространства»

Якутск, 2011

Глава 1

Векторное пространство

1.1 Векторы

1.1.1 Аксиомы векторного пространства

Векторное пространство — это множество V, на котором введены операции сложения векторов и умножения на скаляр. Это означает, что для любых v, $w \in V$ существует $v+w \in V$, и произвольных $v \in V$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ определен $\lambda v \in V$. При этом выполнены следующие условия:

1) $v+w = w+v$ для любых $v, w \in V$ (коммутативность сложения);

2) $v + (w + u) = (v + w) + u$ для любых $u, v, w \in V$ (ассоциативность сложения);

3) существует такой элемент $\vec{0}$, что для любого $v \in V$ выполнено $v + \vec{0} = \vec{0} + v = v$ (существование нейтрального элемента относительно сложения);

4) для любого $v \in V$ существует такой элемент $w \in V$, что $v + w = w + v = \vec{0}$ (существование противоположного элемента).

5) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$ для любых $v \in V$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (ассоциа-

тивность умножения на скаляр);

6) $1v = v$ для любых $v \in V$ (умножение на единицу сохраняет вектор).

7) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ для любых $v \in V$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (дистрибутивность умножения на вектор относительно сложения скаляров);

8) $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$ для любых $v, w \in V$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ (дистрибутивность умножения на скаляр относительно сложения векторов).

Замечание. В курсе алгебры векторы не выделяются стрелкой сверху.

примеры $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[x]$, $C[a, b]$.

упражнения

1. Докажите, что множество $\mathbb{R}^n$ с операциями сложения и умножения на число является векторным пространством. Элементами этого пространства являются упорядоченные n действительных чисел: $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. Сумма двух векторов и произведение на скаляр определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} (v_1, v_2, \ldots, v_n) + (w_1, w_2, \ldots, w_n) &= (v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n); \\ \lambda \cdot (v_1, v_2, \ldots, v_n) &= (\lambda v_1, \lambda v_2, \ldots, \lambda v_n). \end{aligned}$$

2. Докажите, что множество $\mathbb{R}^n[x]$ с операциями сложения и умножения на число является векторным пространством. Элементами $\mathbb{R}^n[x]$ являются многочлены $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ со степенями не выше n с действительными коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Операции на $\mathbb{R}^n[x]$ — обычные операции сложения многочленов и умножения многочлена на действительное число.

3. Докажите, что множество функций $\alpha x^2 + \beta x^3 + \gamma \sin x$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ с операциями сложения и умножения на число является векторным пространством. Операции здесь — обычные операции сложения функций и умножения функции на действительное числа.

4. Покажите, что множество функций $\alpha^2 x + \beta x^3 + \gamma \sin x$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ с операциями сложения и умножения на число НЕ ЯВЛЯЕТСЯ векторным пространством. Операции здесь — обычные операции сложения функций и умножения функции на действительное числа.

Лемма 1 *Кольцо многочленов $\mathbb{R}_n[x]$ является векторными пространством.*

1.1.2 Линейная зависимость

Определение 1 *Системой векторов называется называется упорядоченное множество векторов.*

Выражение вида

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$$

называется ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИЕЙ *системы векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Линейная комбинация векторов называется тривиальной, если $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Система векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$ такая, что*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = \vec{0}, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$$

только в тривиальном случае, называется ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМОЙ.

Определение 2 *Системы векторов, которые не являются линейно независимыми называются* ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫМИ*, т.е. это системы векторов такие, что*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = \vec{0}, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$$

в некотором не тривиальном случае.

Если вектор w равен некоторой линейной комбинации системы векторов v_1, v_2, $\ldots$, v_n, то говорят "w линейно выражается через v_1, v_2, $\ldots$, v_n". Дадим еще одно определение линейной зависимости.

Определение 3 *Система векторов называется* ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫМ, *если хотя бы один вектор v_j системы линейно выражается через остальные векторы*

$$v_j = \beta_1 v_1 + \ldots + \widehat{\beta_j v_j} + \ldots + \beta_n v_n, \quad \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}.$$

Здесь обозначение $\widehat{\beta v}$ означает отсутствие слагаемого.

Лемма 2 (Эквивалентность определений) *Определения 2 и 3 линейной зависимости эквивалентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть система векторов v_i, $i = 1, \ldots, n$, линейная зависима по первому определению. Тогда существует нетривиальная линейная комбинация векторов $\sum \alpha_i v_i$ равная нулевому вектору. Нетривиальность означает, что некоторый $\alpha_j \neq 0$. Тогда вектор

$$v_j = -\sum_{i=1, i\neq j}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_j} v_j.$$

Это означает, что система векторов v_i, $i = 1, \ldots, n$, линейно зависима по второму определению.

Теперь покажем, что из второго определения следует первое. Пусть $v_j = \sum_{i\neq j} \beta_i v_i$. Тогда нетривиальная линейная комбинация $-v_j + \sum_{i\neq j} \beta_i v_i$ равна нулевому вектору.

Лемма доказана.

✎ упражнения

1. Определите линейную зависимость векторов

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Как связана эта задача с системой линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ -4 & -6 & 0 \end{array}\right)?$$

2. Определите линейную зависимость векторов

$$v = 1 + x^2, \quad w = 3 - x^2.$$

3. Определите линейную зависимость векторов

$$v = (1,2,3), \quad w = (4,5,6), \quad u = (7,8,9).$$

4. Определите линейную зависимость векторов

$$v = (1,0,1),\ w = (0,1,0),\ u = (-1,1,-1).$$

5. Известно, что столбцы матрицы A линейно зависимы. Как много решений имеют системы линейных уравнений с матрицей A?

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 8 \\ 8 & 6 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 9 & 7 & 8 & | & 0 \\ 8 & 6 & 7 & | & 0 \\ 7 & 7 & 7 & | & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 9 & 7 & 8 & | & 2 \\ 8 & 6 & 7 & | & 1 \\ 7 & 7 & 7 & | & 7 \end{pmatrix}.$$

1.1.3 Базис и координаты вектора

Определение 4 *Система векторов $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ называется базисом векторного пространства V, если*

1) $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ — линейно независима;

2) каждый вектор V линейно выражается через векторы этой системы векторов.

Размерностью векторного пространства V называется количество векторов в его базисе.

Данное определение требует доказательства корректности — вдруг в некотором пространстве существуют два базиса с различным числом векторов?

Лемма 3 *Размерность пространства не зависит от выбора базиса.*

Доказательство. Допустим, что в векторном пространстве V существуют базисы $v_1, \dots, v_n$ и $w_1, \dots, w_m$, где $n < m$. Тогда, с одной стороны, векторное уравнение $x_1 w_1 + \ldots + x_m w_m = \vec{0}$ имеет единственное тривиальное решение относительно переменных $x_1, \dots, x_m$.

С другой стороны,

$$w_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{1i} v_i, \quad \ldots, \quad w_m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{mi} v_i.$$

Тогда

$$x_1 w_1 + \ldots + x_m w_m = \sum \alpha_{ij} x_i v_j.$$

Однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1\alpha_{11} + x_2\alpha_{21} + \ldots + x_m\alpha_{m1} = 0; \\ x_1\alpha_{12} + x_2\alpha_{22} + \ldots + x_m\alpha_{m2} = 0; \\ \ldots \\ x_1\alpha_{1n} + x_2\alpha_{2n} + \ldots + x_m\alpha_{mn} = 0; \end{cases}$$

где число переменных больше числа уравнений, имеет нетривиальные решения.

Поэтому уравнение $x_1w_1+\ldots+x_mw_m = \vec{0}$ имеет несколько решений. Противоречие.

Лемма доказана.

пример Пример базиса в $\mathbb{R}^n[x]$ — $1,\ x,\ x^2,\ \ldots, x^n$.

Рассмотрим произвольную невырожденную квадратную матрицу $n \times n$. Строки этой матрицы составляют базис $\mathbb{R}^n$. Пример $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$.

упражнения

1. Постройте пример базиса $\mathbb{R}^3[x]$. Укажите размерность $\mathbb{R}^3[x]$.

2. Постройте пример базиса в векторном пространстве функций вида $\alpha \cos x + \beta x + \gamma e^x$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Укажите размерность этого пространства.

3. Постройте пример векторного пространства размерности 4.

4. Почему строки любой матрицы $n \times n$ составляют базис пространства $\mathbb{R}^n$?

5*. (* – означает *сложная задача*). Докажите, что для любых векторных пространств V и U размерности n можно построить взаимнооднозначное соответствие f между всеми ее элементами (биекция) такую, что для любых $v, w \in V$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ выполнено $f(v+w) = f(v) + f(w)$ и $f(\alpha v) = \alpha f(v)$. Такие отображения называются биекциями.

Определение 5 *Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — базис векторного пространства V. Тогда любой вектор v можно представить в виде линейной комбинации векторов базиса*

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}.$$

Набор чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ называется КООРДИНАТАМИ *вектора v.*

Координаты вектор всегда определяются относительно некоторого базиса. При работе с несколькими базисами мы будем писать $v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_e$, что означает $v = e_1\alpha_1 + \ldots + e_n\alpha_n$.

Лемма 4 (Об единственности координат) *Каждый вектор имеет единственный набор координат.*

упражнения

1. Найдите координаты вектора $(2, 0, 4)$ в базисе $(2, 2, 3)$, $(2, 1, 1)$, $(6, 2, 2)$.

2. Найдите координаты вектора $(1, 2, -2)$ в базисе $(1, 1, 1)$, $(1, 2, -1)$, $(1, 2, 0)$.

3. Найдите координаты вектора $1 + 2x - 3x^2$ в базисе $1, x, x^2$.

4. Найдите координаты вектора $4 - 2 + 2x^2$ в базисе $1 - x, 1 + x, 1 + x^2$.

5. Может ли существовать вектор с двумя различными наборами координат?

6. Каждый ли вектор имеет координаты?

7. Покажите, что нахождение координаты вектора по заданному базису в $\mathbb{R}^n$ и решение системы линейных уравнений с n неизвестными и n уравнениями – это эквивалентные задачи.

1.1.4 Векторное подпространство

Определение 6 *Пусть W подмножество векторного пространства V является векторным пространством. Такие подмножества W называются векторными подпространствами V.*

Теорема 1 (Критерий подпространства) *Пусть V — произвольное векторное пространство и $W \subseteq V$ некоторое его подмножество.*

Тогда W является векторным подпространством W если и только если выполнены все следующие условия

1) для любых $v, w \in W$ сумма $v + w \in W$;

2) для любого $w \in W$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ произведение $\lambda w \in W$;

Доказательство.

пример $W = \langle 1, x \rangle$ подпространство $\mathbb{R}_3[x]$.

1.1.5 Линейная оболочка векторов

Множество всех линейных комбинаций вида $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ "пробегают" $\mathbb{R}$, называется линейной оболочкой векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Обозначается $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$.

Иногда $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ называется векторным пространством, натянутым на векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Лемма 5 *Для любой системы векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$ линейная оболочка $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ является векторным пространством.*

Приведем способ, с помощью которого легко определить линейную зависимость произвольной системы векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Теорема 2 *Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_k$ — произвольная система векторов. Линейная оболочка $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ не меняется при элементарных преобразования $v_1, v_2, \ldots, v_k$:*

1) перемена местами векторов;

2) умножение вектора системы на ненулевое число;

3) замена вектора v_i на $v_i + \lambda v_j$, где $j \neq i$.

Доказательство. 1) Значение линейной комбинации не зависит от перемены мест слагаемых, поэтому порядок векторов в линейной комбинации также не имеет значения.

2) Линейные комбинации векторов $v_1, \ldots, v_k$ линейно выражаются через линейные комбинации векторов $v_1, \ldots, \lambda v_j, \ldots, v_k$. Это означает $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle \subset \langle v_1, \ldots, \lambda v_j, \ldots, v_k \rangle$. Также верно обратное включение. Следовательно, эти линейные оболочки совпадают.

3) Линейные комбинации векторов $v_1, \ldots, v_k$ линейно выражаются через линейные комбинации векторов $v_1, \ldots, v_i + \lambda v_j, \ldots, v_k$. Это означает $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle \supset \langle v_1, \ldots, v_i + \lambda v_j, \ldots, v_k \rangle$. Также верно обратное включение. Следовательно, эти линейные оболочки совпадают.

Теорема доказана.

Из этой теоремы, доказательство которого повторяет доказательство лемм об элементарных преобразованиях метода Гаусса решения систем, и следующей леммы следует алгоритм построения базиса линейной оболочки системы векторов.

Лемма 6 *Ненулевые строки матрицы, приведенной к ступенчатому виду, линейно независимы.*

Доказательство. Допустим обратное. Пусть v_1, ..., v_k — ненулевые векторы составленные из строк ступенчатой матрицы и $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = \vec{0}$ — нетривиальная линейная комбинация. Чтобы первая компонента координат равнялась нулю, необходимо равенство нулю α_1. Продолжая такие рассуждения для $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ мы приходим к выводу, что данная линейная комбинация тривиальна.

1.1.6 Ранги матрицы

Определение 7 *Рангом матрицы по строкам называется размерность линейной оболочки векторов, составленных из строк матрицы. Рангом матрицы по столбцам — из столбцов матрицы. Наибольший порядок ненулевого минора называется рангом по минорам.*

Приведем теорему без доказательства.

Теорема 3 *Ранги матрицы по строкам, столбцам и минорам равны.*

Далее вместо ранга матрицы A по строкам, столбцам и минорам пишем просто ранг матрицы A и обозначаем $\operatorname{rang} A$ или $\operatorname{rank} A$.

Лемма 7 *Для произвольной матрицы A, ранг матрицы, составленной из линейных комбинаций строк A, не превышает $rang\, A$.*

Доказательство. Лемма следует из теоремы 2.

Определение 8 *Если матрица A элементарными преобразованиями приведена к ступенчатому виду B, то* ранГОМ МАТРИЦЫ *A называется количество ненулевых строк B. Ранг матрицы A обозначается через $rang\, A$.*

Теорема 4 (Критерий линейной зависимости) *Составим из координат векторов $v_1, v_2, \dots, v_n$ матрицу A.*

Векторы $v_1, v_2, \dots, v_n$ линейно независимы, если и только если $rang\, A$ является максимальным, т.е. $rang\, A = n$.

Теорема 5 *Для произвольных матриц A и B ранг AB не превосходит ранги A и B.*

Доказательство.

1.1.7 Суммирование и пересечение векторных подпространств

Определение 9 *Пусть*

$$U = \langle u_1, u_2, \dots, u_r \rangle \text{ и } W = \langle w_1, w_2, \dots, w_s \rangle$$

векторные подпространства векторного пространства V.

Пересечением подпространств U и W называется подпространство

$$U \cap W = \{u \mid u \in U, w \in W\}.$$

Суммой подпространств U и W называется подпространство

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}.$$

Сумма подрпространств называется прямой, если их пересечение имеет размерность 0. Обозначается через $U \oplus W$.

Ортогональным дополнением к подространству U пространства $\mathbb{R}^n$ называется

$$U^\perp = \{(w_1, \dots, w_n) \mid u_1 w_1 + \dots + u_n w_n, (u_1, \dots, u_n) \in U\}.$$

Теорема 6 *Пусть $U = \langle v_1, v_2, \dots v_k \rangle$. Тогда $U^\perp$ является* *пространством решений однородной системы уравнений*

$$\begin{pmatrix} \longleftarrow v_1 \longrightarrow & 0 \\ \longleftarrow v_2 \longrightarrow & 0 \\ \dots & \dots \\ \longleftarrow v_k \longrightarrow & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема 7 *Пусть U и W векторные подпространства векторного пространства V.*

Тогда $U \cap W = (U^\perp + W^\perp)^\perp$.

Теорема 8 *Пусть U и W векторные подпространства векторного пространства V.*

Тогда $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim U \cap W$.

Лемма 8 *Пусть U векторное подпространство векторного пространства V.*

Тогда любой базис U можно дополнить до базиса V.

Теорема 9 *Пусть A — $m{\times}n$-матрица, $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.*

Тогда множество всех решений однородной системы уравнений $Av = 0$ является векторным подпространством $\mathbb{R}^n$ размерности $n - rang\, A$.

Определение 10 *Пусть v_0 — вектор, L — линейное подпространство V.*

Множество

$$\{v_0 + w \mid w \in L\}$$

называется линейным многообразием с вектором сдвига v_0 и направляющим пространством L.

Его размерностью называется размерность $\dim L$.

Определение 11 *Фундаментальной системой решений однородной системы линейных уравнений называется базис пространства ее решений.*

Теорема 10 *Пусть v_0 — частное решение системы уравнений $Av = b$ и L — пространство решений однородной системы линейных уравнений $Av = \vec{O}$.*

Тогда множество всех решений неоднородной системы уравнений $Av = b$ является линейным многообразием (x_0, L).

1.1.8 Замена координат

Пусть дан "старый" базис e_1, e_2, e_3 в $\mathbb{R}^3$. Определим "новый" базис g_1, g_2, g_3 в $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} g_1 &= a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3; \\ g_2 &= a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3; \\ g_3 &= a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3. \end{aligned}$$

Найдем зависимость между координатами $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_e$ и $(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)_g$.

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \quad a = \alpha'_1 g_1 + \alpha'_2 g_2 + \alpha'_3 g_3.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \alpha'_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Матрицу A называют матрицей перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису g_1, g_2, g_3.

Лемма 9 (О матрице перехода) *Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ даны два базиса*

$$\begin{aligned} a &= (a_1, a_2, a_3), \qquad & p &= (p_1, p_2, p_3), \\ b &= (b_1, b_2, b_3), \qquad & q &= (q_1, q_2, q_3), \\ c &= (c_1, c_2, c_3), \qquad & r &= (r_1, r_2, r_3). \end{aligned}$$

Тогда матрица перехода от координат базиса a, b, c к *координатам базиса p, q, r равна*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Пусть произвольный вектор v имеет координаты $(v_1, v_2, v_3)_{abc}$ относительно базиса a, b, c и координаты

$(w_1, w_2, w_3)_{pqr}$ относительно базиса p, q, r.

По определению координат $v = v_1 a + v_2 b + v_3 c$ и $v = w_1 p + w_2 q + w_3 r$.

С одной стороны выпишем координаты v в стандартном базисе

$$v = v_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} v_1 a_1 \\ v_1 a_2 \\ v_1 a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_2 b_1 \\ v_2 b_2 \\ v_2 b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_3 c_1 \\ v_3 c_2 \\ v_3 c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 a_1 + v_2 b_1 + v_3 c_1 \\ v_1 a_2 + v_2 b_2 + v_3 c_2 \\ v_1 a_3 + v_2 b_3 + v_3 c_3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, v имеет следующие координаты в стандартном базисе

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрица, составленная из координат линейно независимых векторов **имеет максимальный ранг**. Следовательно,

Лемма или теорема доказана

упражнения

1. Найдите матрицу перехода координат от базиса $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ к базису $(4, 2, 3)$, $(2, 2, 4)$, $(3, 0, 1)$.

2. Найдите матрицу перехода координат от базиса $(2, 2, 3)$, $(2, 1, 1)$, $(6, 2, 2)$ к базису $(1, 1, 1)$, $(1, 2, -1)$, $(1, 2, 0)$.

3. Может ли матрица перехода от базиса к базису быть вырожденной?

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.1.9 Изоморфизмы векторных пространств

Определение 12 *Отображение $f : V \to W$ называется биекцией, если оно*

1) взаимно однозначно ($f(u) = f(v) \Rightarrow u = v$);

2) всюду определено на V (для любого $v \in V$ существует $f(v)$);

3) отображает "на" W (для любого $w \in W$ существует $v \in V$ такое, что $w = f(v)$);

Биекция $f : V \to W$ между векторными пространствами называется изоморфизмом векторных пространств, если она сохраняет оперции, т.е. для любых $v, u \in V$ и числа $\alpha \in \mathbb{R}$

4) $f(v +_V u) = f(v) +_W f(w)$;

5) $f(\alpha \cdot_V v) = \alpha \cdot_W f(v)$.

Здесь "$+_V$"операция сложения векторов, "$\cdot_V$"умножения вектора на число в пространстве V; "$+_W$"операция сложения векторов, "$\cdot_W$"умножения вектора на число в W.

Если существует изоморфизм между V и W, то векторные пространства V и W называются изоморфными. Обозначается через $V \cong W$.

Поскольку композиция биекций является биекцией, то $U \cong V$ и $V \cong W$, то $U \cong W$.

Теорема 11 (Об изоморфности n-мерных пространств) *Каждое векторное пространство размерности n изоморфно $\mathbb{R}^n$.*