ФГАОУ ВПО СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. К. АММОСОВА
Институт математики и информатики
Кафедра алгебры и геометрии

Системы линейных уравнений

Якутск 2011

Шамаев Эллэй Иванович, к.ф.-м.н.,
доцент кафедры алгебры и геометрии ИМИ СВФУ

Р е ц е н з е н т:
Гурзо Галина Григорьевна, к.ф.-м.н., профессор,
заведующая кафедрой математики, информатики и
статистики ЯЭПИ (ф) ОУП АТ и СО

Оглавление

Глава 1

Системы линейных уравнений

1.1 Что такое система уравнений?

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и b — некоторые действительные числа; x_1, x_2, $\ldots$, x_n — некоторые символы. Тогда уравнение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \ = \ b,$$

называется линейным. Символы x_1, x_2, $\ldots$, x_n мы будем называть переменными или неизвестными.

Рассмотрим следующее выражение из m линейных уравнений:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2; \\ \ldots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}\right. \tag{1.1}$$

Определения 1 *Выражение вида (1.1) называется системой m линейных уравнений с n неизвестными. В дальнейшем такие системы будем называть просто систе-*

мой, поскольку другие системы уравнений в этой главе не рассматриваются. Набор из n чисел $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ называется решением системы линейных уравнений (1.1), если при подстановке этого набора в систему линейных уравнений вместо неизвестных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ все уравнения станут верными равенствами. Множество, состоящее из всех решений системы, называется множеством решений системы. Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется совместной, иначе система называется несовместной.

Система, имеющая единственное решение называется определенной. Система имеющая бесконечное множество решений, называется неопределенной.

Если множества решений систем линейных уравнений совпадают, то эти системы называются эквивалентными.

Определения 2 *Коэффициенты при неизвестных системы линейных уравнений запишем в виде таблицы*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \ldots & \ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

называемой матрицей из m строк и n столбцов. Матрицы (1.2) будем называть основной матрицей системы и обозначать буквой A. Присоединим к матрице A столбец из свободных членов, отделив его вертикальной чертой от коэффициентов при неизвестных

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ & \ldots & \ldots & & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \tag{1.3}$$

Матрицу (1.3) назовем расширенной матрицей системы *и будем обозначать ее через* $\tilde{A}$.

Далее расширенную матрицу системы $\tilde{A}$ будем считать краткой формой записи системы (1.1) и также будем называть системой m линейных уравнений с n неизвестными.

Весь первый семестр мы будем исследовать системы линейных уравнений. Вопросы, которые нас интересуют: *как находить все решения систем линейных уравнений?*, *когда система линейных уравнений разрешима?* и *когда совместная система имеет единственное решение?*

Чтобы ответить на этот вопрос мы введем понятия матрицы, определителя матрицы, векторного пространства, векторного подпространства, линейной зависимости, размерности, фундаментальной системы решений и т.д.

Для решения систем линейных уравнений часто используют *метод Гаусса.* В этом методе шаг за шагом выражают неизвестную через другие и исключают из системы уравнений.

1.1.1 Элементарные преобразования

Ознакомимся с тремя элементарными преобразованиями систем уравнений, с помощью которых мы сможем упростить любую систему линейных уравнений.

Лемма 1 (1-е элементарное преобразование) *После перестановки местами уравнений система линейных уравнений остается эквивалентной прежней.*

Лемма 2 (2-е элементарное преобразование) *После умножения i-го уравнения системы, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, на число λ, $\lambda \neq 0$, система линейных уравнений остается эквивалентной прежней.*

Доказательство лемм 1 и 2. Эквивалентость систем означает равенство множеств решений этих систем. Для доказательства равенства множеств решений этих систем покажем, что 1) все решения первоначальной системы являются решениями новой системы; 2) все решения новой являются решениями первоначальной системы.

Действительно, пусть $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ — решение первоначальной системы, т.е. при подстановке этого набора чисел в старую систему все уравнения станут верными равенствами.

Тогда при подстановке $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ в новую систему мы получаем верные равенства, поскольку в первой лемме новая система состоит из уравнений первоначальной системы; во второй лемме — поскольку из равенства

$$a_{i1}x_1^0 + a_{i2}x_2^0 + \ldots + a_{in}x_n^0 = b_i$$

следует равенство

$$\lambda a_{i1}x_1^0 + \lambda a_{i2}x_2^0 + \ldots + \lambda a_{in}x_n^0 = \lambda b_i$$

для любого λ. Следовательно, каждое решение первоначальной системы является решением новой.

Пусть теперь $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ — решение новой системы.

Тогда при подстановке $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ в старую систему мы получаем верные равенства, поскольку в первой лемме первоначальная система состоит из уравнений новой системы. Во второй лемме — поскольку из равенства

$$\lambda a_{i1}x_1^0 + \lambda a_{i2}x_2^0 + \ldots + \lambda a_{in}x_n^0 = \lambda b_i$$

следует равенство

$$a_{i1}x_1^0 + a_{i2}x_2^0 + \ldots + a_{in}x_n^0 = b_i$$

для произвольного $\lambda \neq 0$. Леммы 1 и 2 доказаны.

Более содержательной является третья лемма.

Лемма 3 (3-е элементарное преобразование) *Если к одному из уравнений системы прибавить другое уравне-*

ние этой системы, умноженное на число λ, то полученная система эквивалентна прежней системе.

Доказательство. Пусть к k-му уравнению системы прибавлено l-ое уравнение, умноженное на число λ. Через R_1 обозначим множество решений первой системы, через R_2 — множество решений второй системы.

Рассмотрим произвольное решение $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in R_1$ и подставим этот набор чисел во вторую систему. После перестановки слагаемых левая часть k-го равенства равна $(a_{k1}x_1^0 + a_{k2}x_2^0 + \ldots + a_{kn}x_n^0) + \lambda(a_{l1}x_1^0 + a_{l2}x_2^0 + \ldots + a_{l1}x_n^0)$. Первая скобка равна b_k, вторая — b_l. Следовательно, всё это выражение равно $b_k + \lambda b_l$. Таким образом, k-ое выражение второй системы линейных уравнений является верным равенством. Во всех остальных строках равенства очевидно верны. Тогда $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in R_2$. Это означает $R_1 \subseteq R_2$.

Пусть $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ — произвольное решение второй системы. Подствим этот набор чисел в каждое уравнение первой системы. Справедливость всех равенств, кроме k-ого очевидна. Рассмотрим k-ое равенство:

$$\big((a_{k1} + \lambda a_{l1})x_1^0 + (a_{k2} + \lambda a_{l2})x_2^0 + \ldots + (a_{kn} + \lambda a_{ln})x_n^0\big) = b_k + \lambda b_l.$$

После перегруппировки слагаемых и вынесения за скобки общего множителя λ это выражение примет вид:

$$(a_{k1}x_1^0 + a_{k2}x_2^0 + \ldots + a_{k1}x_n^0) - \lambda(a_{l1}x_1^0 + a_{l2}x_2^0 + \ldots + a_{l1}x_n^0) = b_k + \lambda b_l.$$

Сумма во второй скобке равна λb_l. Следовательно, сумма в первой скобке равна b_k. Таким образом, k-ое выражение первоначальной системы является верным равенством. Тогда $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in R_1$. Это означает, что $R_2 \subseteq R_1$.

Из $R_1 \subseteq R_2$ и $R_1 \supseteq R_2$ следует $R_1 = R_2$, что означает эквивалентность этих систем. Лемма 3 доказана.

упражнения

1.1 Проверьте, является ли набор чисел $(1, -1, 2)$ решением следующей системы
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \end{array}\right)?$$

1.2 Укажите несовместную систему
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

1.3 Решите системы линейных уравнений
$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 12 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{array}\right).$$

1.4 Решите системы линейных уравнений
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 5 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

1.5 На одном кассовом чеке: “тетрадь – 6 шт, ручка – 3 шт, дискета – 2 шт, итого – 65 руб". На другом чеке: “тетрадь – 4 шт, ручка – 2 шт, дискета – 3 шт, итого – 60 руб. Сколько стоят 10 тетрадей и 5 ручек?".

1.6 Решите системы линейных уравнений
$$\left(\begin{array}{cc|c} 8 & 5 & -17 \\ 7 & 3 & -8 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2009 & 2010 & 1 \\ 2008 & 2011 & 3 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 13 & 26 & 39 \\ 13 & 26 & 39 \end{array}\right).$$

1.7 Можно ли элементарными преобразованиями избавиться от неизвестной x_1 во всех уравнениях кроме одного?

1.8 Можно ли элементарными преобразованиями из несовместной системы уравнений получить совместную?

1.1.2 Описание метода Гаусса

Рассмотрим систему из m уравнений с n переменными

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \tag{1.4}$$

Опишем метод Гаусса решения произвольной системы линейных уравнений (1.4). Этот метод состоит из двух частей — прямого и обратного хода.

1) Прямой ход метода Гаусса.

а) Среди коэффициентов первого столбца имеется ненулевой, иначе переменная x_1 отсутствует в системе линейных уравнений и, тогда, x_1 может принимать любое значение. Такие переменные называются *свободными переменными.*

б) Выберем среди коэффициентов первого столбца ненулевой a_{k1} и назовем *ведущим.*

в) Поменяем 1-ю и k-ю строки местами. Выпишем полученную систему линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} & b'_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} & b'_2 \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{m1} & a'_{m2} & \ldots & a'_{mn} & b'_m \end{array}\right). \tag{1.5}$$

г) К каждой i-ой строке, начиная со второй, прибавим первую строку, умноженную на число $-a'_{i1}/a'_{11}$.

Таким образом, мы избавимся от неизвестной x_1 во всех уравнениях кроме первого уравнения. Далее решаем систему линейных уравнений без первого уравнения и столбца. Продолжая этот процесс уменьшения числа переменных и уравнений в конце прямого хода Гаусса получится *ступенчатая* система.

Дадим эквивалентные определения ступенчатости.

Определение 2 *Ступенчатой матрицей называется матрица, удовлетворяющая следующими условиями:*

1) если некоторая строка матрицы состоит из одних нулей, то все строки, расположенные ниже этой строки, также состоят из нулей;

2) если первые неулевые элементы k-ой и $(k+1)$-ой строк располагаются в столбцах с номерами p_k и p_{k+1} соответственно, то $p_k < p_{k+1}$.

Определение 3 *Систему линейных уравнений называют приведенной к ступенчатому виду, если элементарными преобразованиями нельзя увеличить число нулевых элементов ниже ведущих элементов.*

Теперь определим ступенчатые системы

Определение 4 *Ступенчатой системой будем называть систему с расширенной матрицей, которая является ступенчатой.*

Приведем примеры ступенчатых систем:

примеры

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} \boldsymbol{\ast} & \ast & \ast & \ast & \ast \\ 0 & \boldsymbol{\ast} & \ast & \ast & \ast \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\ast} & \ast & \ast \end{array}\right), \quad \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} \boldsymbol{\ast} & \ast & \ast & \ast & \ast \\ 0 & \boldsymbol{\ast} & \ast & \ast & \ast \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{\ast} & \ast \end{array}\right), \quad \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} \boldsymbol{\ast} & \ast & \ast & \ast & \ast \\ 0 & \boldsymbol{\ast} & \ast & \ast & \ast \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

По нашему алгоритму в первой системе свободной переменной является x_4; во второй — x_3; в третьей системе — x_3 и x_4.

По-сути, свободные переменные — те переменные,

1) которые принимают произвольные значения и

2) через набор свободных переменных можно выразить все остальные переменные.

Выбор свободных переменных неоднозначен. Для упрощения понимания метода Гаусса всегда будем выбирать переменные, соответствующие столбцам без ведущих элементов, свободными.

2) Обратный ход метода Гаусса.

Если одно из уравнений имеет вид $(0\ 0\ 0\ \ldots\ 0 \mid c\ )$, где $c \neq 0$, то это уравнение не имеет решений. Тогда не имеет решений и вся система.

Пусть система состоит из k уравнений и приведена к ступенчатому виду. Пусть переменные, не являющиеся свободными, имеют индексы i_1, i_2, …, i_k.

а) Из самого нижнего уравнения мы выразим x_{i_k} через константы правой части и свободные переменные. Теперь во всех предыдущих уравнениях x_{i_k} можно заменить на ее выражение через константы и свободные переменные.

Далее мы решаем систему без последнего уравнения, поскольку оно разрешилось, и переменной x_{i_k}.

Продолжая этот процесс, мы все переменные x_{i_1}, x_{i_2}, …, x_{i_k} выразим через свободные переменные и некоторые числа.

При любых значениях свободных переменных переменные x_{i_1}, x_{i_2}, …, x_{i_k} равны некоторым числам. Получающиеся наборы чисел являются решениями.

Определение 5 *Общим решением системы называется "перечисление" любым способом множество ее решений.*

Таким образом, теперь мы знаем метод Гаусса, с помощью которого можно найти общее решение любой системы линейных уравнений.

пример

Решим систему линейных уравнений методом Гаусса
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 8 & 9 \\ 3 & -1 & 4 & 5 \end{array}\right).$$
Для этого выполним цепочку элементарных преобразований:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 8 & 9 \\ 3 & -1 & 4 & 5 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & 5 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

1) к первой строке прибавили вторую, умноженную на число «-2».

2) полученную первую строчку умножили на число «-1».

3) ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на число «-3».

Мы получили ступенчатую матрицу. Неизвестную x_3 можно объявить свободной неизвестной.

Далее мы можем проделать обратный ход метода Гаусса, который мы рассмотрели выше, и найти общее решение системы.

Продолжим решение системы с помощью метода Жордана-Гаусса.
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right).$$
Мы выполнили следующие элементарные преобразования:

1) вторую строку умножили на число «$-1/2$»;

2) к первой строке прибавили вторую строку.

В результате этих преобразований мы добились, чтобы первыми ненулевыми элементами строк ступенчатой матрицы были единицы, а выше этих единиц стояли нули. Теперь из первого уравнения выразим x_1, а из второго — x_2. Получим $x_1 = 2 - 2x_3$ и $x_2 = 1 - 2x_3$.

Общее решение системы запишем в виде вектора $(2 - 2x_3, 1 - 2x_3, x_3)$, где x_3 может принимать любые действительные значения.

Придавая свободной неизвестной конкретные значения, мы можем найти бесконечно много частных решений.

Ответ: общее решение $(2-2x_3, 1-2x_3, x_3)$.

упражнения

2.1 Найдите общие решения систем линейных уравнений
$$\left(\begin{array}{cc|c} 8 & 5 & -17 \\ 7 & 3 & -8 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2009 & 2010 & 1 \\ 2008 & 2011 & 3 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 21 & 31 & 23 \\ 12 & 13 & 32 \end{array}\right).$$

2.2 Найдите общие решения систем линейных уравнений
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 2 & -5 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 3 & 15 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 16 \\ 3 & 3 & 29 \\ 1 & 2 & 13 \end{array}\right).$$

2.3 Приведите пример несовместной системы с тремя свободными переменными.

2.4 Приведите пример совместной системы с двумя свободными переменными.

2.5 Можно ли придумать альтернативу методу Гаусса, где система вида
$$\left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ * & * & * & \boldsymbol{*} & * \\ * & * & \boldsymbol{*} & 0 & * \\ * & \boldsymbol{*} & 0 & 0 & * \end{array}\right).$$
будет считаться ступенчатой?

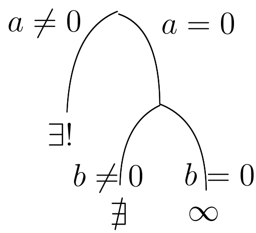
1.2 Существование и единственность

Вопрос существования и единственности решения системы является важным для приложений алгебры. Для многих задач математического моделирования важна единственность решения. Если математическая модель некоторого физического процесса имеет несколько решений (ответов), то скорее эта модель неправильна.

1.2.1 Случай одной переменной

Если $a \neq 0$, то уравнение $ax = b$ имеет решение и это решение единственно.

Если $a = 0$, то уравнение, либо не имеет решений, либо имеет бесконечно много решений.



1.2.2 Случай двух переменных

Теорема 1 (Существование и единственность — 2×2) *Если $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, то система линейных уравнений*

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right) \tag{1.6}$$

имеет решение и это решение единственно.

Если $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$, то система (1.6) либо не имеет решений, либо имеет бесконечно много решений.

Доказательство. Прямыми вычислениями убеждаемся, что набор чисел

$$\left(\frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, \frac{a_{11}b_1 - a_{21}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}\right) \tag{1.7}$$

является решением системы.

Покажем единственность решения. Пары чисел a_{11}, a_{12} не равны нулю одновременно. Также это верно для a_{21}, a_{22}. Если хотя бы один из коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{21} и a_{22} равен нулю, то, разбирая каждый случай, легко показать единственность решения системы.

В обратном случае, умножим первое уравнение на a_{21}, второе — на a_{11}. Вычтем из второго уравнения первое уравнение и получим ступенчатую систему уравнений эквивалентную первоначальной системе. Для полученной ступенчатой единственность решения очевидна.

Теорема доказана.

Выражение $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ называется определителем матрицы второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

С помощью определителя мы получили исчерпывающий ответ на вопрос: когда система из двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right)$$

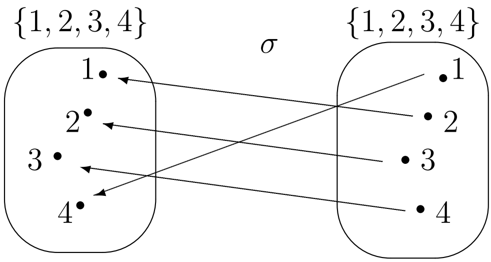
имеет единственное решение?

Далее нам предстоит определить аналогичную величину для матриц более высокого порядка, что позволит ответит на вопрос существования и единственности решения для бо́льших систем.

Для этого нам потребуется понятие подстановки.

1.2.3 Симметрическая группа

Определение 6 *Подстановкой n элементов называется биекция множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ на себя.*



Этот пример подстановки отображает 1 в 4, 2 в 1, 3 в 2, 4 в 3. Другими словами $\sigma(1) = 4$, $\sigma(2) = 1$, $\sigma(3) = 2$, $\sigma(4) = 3$. Любую такую биекцию можно задать таблицей из двух строк:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Определение 7 *Произведение подстановок n элементов σ_1 и σ_2 определим следующим образом*

$$(\sigma_1 \cdot \sigma_2)(i) = \sigma_1(\sigma_2(i)), \quad i = 1, \ldots, n.$$

В математической литературе композиция отображений $\sigma_1(\sigma_2(i))$ обозначается через $\sigma_1 \circ \sigma_2$. Поэтому произведение подстановок можно записать $\sigma_1 \cdot \sigma_2 = \sigma_1 \circ \sigma_2$.

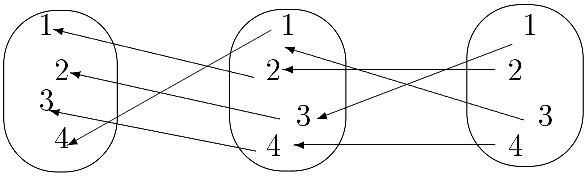
Из того, что композиция биекций является биекцией следует лемма.

Лемма 4 *Если σ_1 и σ_2 подстановки из n элементов, то $\sigma_1 \cdot \sigma_2$ также является подстановкой из n элементов.*

✎ **пример** Таким образом, под произведением подстановок мы понимаем композицию двух отображений

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

которую можно проиллюстрировать



Отображения нам приходится рисовать справа налево, поскольку обозначения функций принято писать слева от аргумента.

Замечание. Запись $\sigma(i)$ сократим: σi. Это также естественно как замена $\sin(\pi)$ сокращением $\sin\pi$.

Лемма 5 (О мощности $|S_n|$) *Количество всех подстановок n элементов равно*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$$

Доказательство. Построим произвольную подстановку n-ой степени. Выберем $\sigma 1$. Это можно сделать n различными способами. Затем выберем $\sigma 2$ из множества $\{1, 2, .., n\}$ без $\sigma 1$. Этот выбор можно сделать $n-1$ способом. Продолжим процесс выбора элементов. При выборе последнего элемента σn останется единственный вариант. Таким образом, число вариантов выбора подстановки равно $n!$

Лемма доказана.

Определение 8 *Множество M с операцией $* : M \times M \to M$ называется группой, если обладает свойствами:*

1. Для любых $a, b, c \in M$ верно $a * (b * c) = (a * b) * c$

2. Существует $\varepsilon \in M$, такое, что для любых $a \in M$ верно $a * \varepsilon = \varepsilon * a = a$

3. Для любого $a \in M$ существует такое $b \in M$, что выполняется равенство: $a * b = b * a = \varepsilon$

Замечание: элемент ε называют единицей или нулем, элемент b — обратным и обозначают через a^{-1} или противоположным и пишут как $-b$.

Определение 9 *Далее докажем, что множество всех подстановок n элементов с операцией умножения является группой. Эта группа называется симметрической группой и обозначается через S_n.*

Знак произведения будем опускать. Справедливы следующие три вспомогательные леммы.

Лемма 6 *Для любых подстановок $\sigma, \rho, \tau \in S_n$ верно равенство:*

$$\sigma(\rho\tau) = (\sigma\rho)\tau.$$

Доказательство. Пусть $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$,

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} \text{ и } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\rho(i) = b_i$ и $\sigma(i) = a_i$ для $i = 1, \dots, n$, то

$$\rho\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ b_{c_1} & b_{c_2} & \dots & b_{c_n} \end{pmatrix} \text{ и } \sigma\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_{b_1} & a_{b_2} & \dots & a_{b_n} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\sigma(\rho\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_{b_{c_1}} & a_{b_{c_2}} & \dots & a_{b_{c_n}} \end{pmatrix} = (\sigma\rho)\tau.$$

Лемма доказана.

Лемма 7 *Для единичной подстановки*

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \in S_n$$

и любой $\sigma \in S_n$ верны равенства

$$\sigma = \varepsilon\sigma = \sigma\varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \in S_n$. Далее прямыми вычислениями проверяем равенства $\varepsilon\sigma = \sigma\varepsilon = \sigma$ для $\sigma \in S_n$ в общем случае.

Лемма доказана.

Лемма 8 *Для любой $\sigma \in S_n$ существует такая $\sigma^{-1} \in S_n$, что $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = \varepsilon$.*

Доказательство. Построим для произвольной подстановки $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ обратную подстановку

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Построенная σ^{-1} действительно является обратной подстановкой, поскольку $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = \varepsilon$.

Лемма доказана.

Теорема 2 *Из лемм 6-8 следует, что S_n является группой с операцией умножения подстановок.*

Группа S_n с операцией умножения называется симметрической группой.

В этой группе, вообще говоря, $\sigma\tau \neq \tau\sigma$ для некоторых σ, $\tau \in S_n$. Проверьте это.

Заметим, что для любой группы G любое уравнение $x * a = b$ для a и $b \in G$ имеет единственное решение $x = b * a^{-1}$.

✎ упражнения

3.4 Для подстановок

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

найдите $\sigma 3$, $\rho 5$, $\sigma 5$.

3.5 Найдите произведения подстановок $\sigma\rho$ и $\rho\sigma$.

3.6 Найдите обратные подстановки σ^{-1} и ρ^{-1}.

3.7 Определим $\tau \in S_3 : \tau 1 = 3,\ \tau 2 = 2,\ \tau 3 = 1$. Найдите и сравните суммы

$$\sum_{\sigma\in S_3} \sigma 2, \quad \sum_{\sigma\in S_3} \sigma 3, \quad \sum_{\sigma\in S_3} \sigma^{-1} 3 \quad \text{и} \quad \sum_{\sigma\in S_3} \sigma\tau 3.$$

1.2.4 Четность подстановок

Определение 10 *Если $i > j$ и $\sigma i < \sigma j$, то говорят, что пара $(\sigma i, \sigma j)$ называется инверсией подстановки σ.*

Если число инверсий $\sigma \in S_n$ четно, то подстановку σ называют четной, иначе — нечетной.

Определим вспомогательную функцию $sgn : S_n \to \{\pm 1\}$.

$$sgn\, \sigma = \begin{cases} +1, & \text{если } \sigma \text{ — четная;} \\ -1, & \text{если } \sigma \text{ — нечетная.} \end{cases}$$

пример В подстановке

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

все инверсии — это пары $(3, 2)$ и $(4, 2)$.

Подстановки, которые меняют местами ровно два элемента называются *транспозициями.*

Определение 11 *Циклом $(a_1 a_2 \ldots a_k)$ называется подстановка, которая определена следующим образом:*

$$(a_1 a_2 \ldots a_k) i = \begin{cases} a_1, & \text{если } i = a_k, \\ a_{j+1}, & \text{если } i = a_j \in \{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}\}, \\ i, & \text{если } i \notin \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}. \end{cases}$$

Число k называется длиной цикла.

Понятие цикла проще объяснить с помощью рисунка.

Транспозиция произвольных чисел i и j является циклом (ij).

Заметим, что для любой транспозиции σ верно $\sigma^{-1} = \sigma$. Отображения с таким свойством называются *инволюциями.*

Докажем следующую лемму.

Лемма 9 *Для любой $\sigma \in S_n$ и транспозиции $\tau = (ij) \in S_n$ верны равенства*

$$sgn\,\tau = -1 \text{ и } sgn\,(\sigma\tau) = sgn\,\sigma \cdot sgn\,\tau.$$

Доказательство. Не теряя общность, считаем $i < j$.

Подстановка τ не содержит инверсий с τk при натуральных $k \in [1; i) \cup (j; n]$.

Рассмотрим τk, $k \in [i; j]$. Число τi образует инверсию со всеми остальными числами τk, $k \in (i; j]$. Число τj также образует инверсию со всеми τk, $k \in [i; j)$. Других инверсий нет. Суммарное количество натуральных чисел в $(i; j]$ и $[i; j)$ равно $2(j - i - 1)$ и четно, но инверсию $(\tau i, \tau j)$ мы подсчитали дважды. Следовательно, τ имеет нечетное число инверсий $2(j - i - 1) - 1$, что означает $\operatorname{sgn} \tau = -1$.

Далее рассмотрим произвольную $\sigma \in S_n$.

Если $k < i < j$, то количество инверсий среди двух пар $(\sigma k, \sigma i)$ и $(\sigma k, \sigma j)$ и пар $(\sigma\tau k, \sigma\tau i) = (\sigma k, \sigma j)$ и $(\sigma\tau k, \sigma\tau j) = (\sigma k, \sigma i)$ не отличается.

Количество инверсий не изменится и при $i < j < k$ среди пар $(\sigma i, \sigma k)$ и $(\sigma j, \sigma k)$.

Если $i < k < j$ количество инверсий среди двух пар $(\sigma i, \sigma k)$ и $(\sigma k, \sigma j)$ и пар $(\sigma\tau i, \sigma\tau k)$ и $(\sigma\tau k, \sigma\tau j)$ отличается на четное число.

Если $(\sigma i, \sigma j)$ составляют инверсию, то пара $(\sigma\tau i, \sigma\tau j) = (\sigma j, \sigma i)$ не является инверсией, иначе $(\sigma j, \sigma i)$ — инверсия.

Таким образом, количество инверсий подстановок изменилось на нечетное число.

Лемма доказана.

Лемма 10 (***О разложении подстановки в произведение транспозиций***) *Любую подстановку $\sigma \in S_n$ можно представить в виде произведения транспозиций*

$$\sigma = \tau_1 \tau_2 \cdot \ldots \cdot \tau_t.$$

Доказательство проведем с помощью математической индукции по числу элементов n.

База индукции: каждую подстановку

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

можно представить в виде произведения транспозиций.

Индуктивное предположение: пусть утверждение леммы верно для S_{k-1}.

Шаг индукции. Рассмотрим произвольную

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & k-1 & k \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{k-1} & a_k \end{pmatrix} \in S_k.$$

Будем считать, что $a_i = k$. Тогда произведение σ и $(k\ i)$ переводит k в k. В случае $k = i$ считаем $(k\ k)$ единичной подстановкой.

Пусть $\rho \in S_{k-1}$ такая, что $\rho j = \sigma(k\ i)j$, $j = 1, \ldots, k-1$. Тогда по индукционному предположению ρ разлагается в произведение транспозиций $\rho = \tau_1 \tau_2 \cdot \ldots \cdot \tau_s$. Отсюда

$$\sigma = \tau_1 \tau_2 \cdot \ldots \cdot \tau_s (k\ i).$$

Лемма доказана.

Смысл доказанной леммы очень прост: любой набор карточек с числами можно упорядочить меняя местами по две карточки. Мы предложили алгоритм, в котором мы ставим на последнее место карточку с наибольшим числом. Далее решаем подобную задачу для $n-1$ карточки.

Теорема 3 (***о корректности определения четности подстановки***) *Определение четности подстановки корректно.*

Доказательство. Докажем, что из равенства произведений $\tau_1\tau_2 \cdot \ldots \cdot \tau_k = \rho_1\rho_2 \cdot \ldots \cdot \rho_l$ следует, что четности k и l совпадают. Это утверждение эквивалентно тому, что любое разложение единичной подстановки $\varepsilon \in S_n$ на произведение транспозиций $\varepsilon = \varepsilon_1\varepsilon_2 \cdot \ldots \cdot \varepsilon_m$ состоит из четного количества числа транспозиций. По лемме 9 это действительно так.

Теорема 4 (о четности произведения подстановок) *Для любых σ и $\tau \in S_n$ справедлива формула*

$$sgn\, \sigma\tau = sgn\, \sigma \cdot sgn\, \tau.$$

Доказательство. Следует из лемм 9 и 10.

упражнения

3.8 Определите четность подстановок

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.9 Существует ли подстановка четырех элементов без инверсий? Существует ли подстановка пяти элементов с 10 инверсиями?

1.2.5 Свойства сумм по S_n

Сумма по конечному множеству I обозначается через $\sum_{i\in I} a_i$.

Лемма 11 *Пусть $P(\sigma), \sigma \in S_n$ — обозначает функцию от $\sigma 1, \sigma 2, \ldots, \sigma n$; τ — транспозиция (ij).*

Справедливы равенства

$$\sum_{\sigma\in S_n} P(\sigma) = \sum_{\sigma\in S_n} P(\sigma^{-1}) \text{ и } \sum_{\sigma\in S_n} P(\sigma) = \sum_{\sigma\in S_n} P(\sigma\tau).$$

Доказательство. Достаточно показать, что

$$\iota : S_n \to S_n, \quad \iota : \sigma \to \sigma^{-1} \text{ и } \kappa : S_n \to S_n, \quad \kappa : \sigma \to \sigma\tau$$

являются биекциями.

Действительно, 1) $\iota\sigma$ и $\kappa\sigma$ определены для всех $\sigma \in S_n$;

2) определены прообразы $\sigma^{-1} = \iota^{-1}\sigma$ и $\sigma\tau = \kappa^{-1}\sigma$ для каждого $\sigma \in S_n$, поскольку $(\sigma^{-1})^{-1} = \sigma$ и $\sigma\tau\tau = \sigma$;

3) из каждого $\iota\sigma = \iota\rho$ и $\sigma\tau = \rho\tau$ следует $\sigma = \rho$.

Лемма доказана.

1.2.6 Определитель матрицы $n \times n$

Для определения понятия определителя матриц $n \times n$ нам понадобится каждой строке поставить в соответствие номер столбца так, чтобы разным строкам соответствовали разные столбцы. Выпишем в таблицу номера строк и ниже номера столбцов:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

где $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{1, 2, \dots n\}$. Эти соответствия естественно являются подстановками из n элементов.

Определение 12 *Определителем матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется выражение

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} sgn\, \sigma\, a_{1\sigma 1} a_{2\sigma 2} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma n},$$

где суммирование ведется по всевозможным подстановкам $\sigma \in S_n$.

пример Случай $n = 2$. Число подстановок равно по лемме 5 равно $2! = 2$. Выпишем все эти подстановки со знаками.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{+1}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{-1}.$$

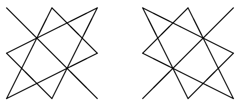
Тогда $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Случай $n = 3$. Выпишем все подстановки S_3 и их знаки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{+1}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}_{+1}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{+1},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}_{-1}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{-1}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{-1}.$$

Поэтому



$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Таким образом, определителем квадратной матрицы A размером $n \times n$ называется сумма всевозможных произведений n элементов матрицы взятых по одному из каждой строки и каждого столбца и знака $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix}$, где σ определяется номерами столбцов и строк выбранных элементов.

1.2.7 Свойства определителей

Транспонированной матрицей матрицы (a_{ij}) называют матрицу (a_{ji}). Обозначается через A^T. Приведем пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Свойство 1 *Для любой квадратной матрицы A выполнено*

$$\det A = \det A^T.$$

Доказательство. В произведении $a_{1\sigma 1}\dots a_{n\sigma n}$ элементы выписаны в порядке возрастания номера строки. Те же элементы в $a_{\sigma^{-1}11}\dots a_{\sigma^{-1}nn}$ выписаны в порядке возрастания номера столбца.

Из $\varepsilon = \sigma\sigma^{-1}$ и теоремы 4 следует $\operatorname{sgn}\sigma \cdot \operatorname{sgn}\sigma^{-1} = 1$, что означает $\operatorname{sgn}\sigma = \operatorname{sgn}\sigma^{-1}$.

Поэтому справедливы равенства

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\ a_{1\sigma 1}\dots a_{n\sigma n} =$$

$$\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma^{-1}\ a_{\sigma^{-1}11}\dots a_{\sigma^{-1}nn}.$$

Последнее выражение по лемме 11 равно

$$\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\ a_{\sigma 11}\dots a_{\sigma nn} = \det A^T.$$

Свойство доказано.

Из доказанного следует, что все свойства определителя матрицы справедливые для строк имеют место и для столбцов. Обратное также верно

Свойство 2 *Если строка матрицы A состоит из нулей, то* $\det A = 0$.

Доказательство. Пусть номер нулевой строки равен i. Утверждение следует из того, что каждое слагаемое определителя содержит множитель вида $a_{i\sigma i}$.

Свойство 3 *При перестановке местами двух строк матрицы определитель меняет знак.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу (a_{ij}). Матрицу, полученную перестановкой строк r и s, $r < s$, обозначим через (b_{ij}). Пусть $\tau = (rs)$. Тогда верны равенства

$$\det(b_{ij}) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\, a_{1\sigma 1}\cdot\ldots\cdot a_{r\sigma s}\cdot\ldots\cdot a_{s\sigma r}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma n} =$$
$$= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\, a_{1\tau\sigma 1}\cdot\ldots\cdot a_{r\sigma\tau r}\cdot\ldots\cdot a_{s\sigma\tau s}\cdot\ldots\cdot a_{n\tau\sigma n}.$$

Из $\operatorname{sgn}\sigma = -\operatorname{sgn}\sigma\tau$ и леммы 11 следует, что последнее выражение равно

$$-\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\tau\, a_{1\sigma\tau 1}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma\tau n} = -\det(a_{ij}).$$

Свойство доказано.

Свойство 4 *Если матрица A содержит одинаковые строки, что* $\det A = 0$.

Доказательство. Обозначим $\det A$ через λ. Из свойства 3 следует, что после перестановки равных строк определитель равен $-\lambda$. Следовательно, $\lambda = 0$.

Свойство 5 *Если все элементы i-ой строки матрица A умножить на λ, то $\det A$ умножится на λ.*

Доказательство. Утверждение следует из того, что каждое слагаемое определителя содержит ровно один множитель вида $\lambda a_{i\sigma i}$.

Свойство 6 *Если матрица A содержит пропорциональные строки, что* $\det A = 0$.

Доказательство. Справедливость утверждения следует из свойств 4 и 5.

Свойство 7 *Пусть $A_i(v)$ — матрица, где с i-ая строка заполнена набором чисел v.*

Тогда верно равенство

$$\det A_i(v) + \det A_i(w) = \det A_i(v+w)$$

для любых наборов чисел v и w.

Доказательство. Справедливы очевидные равенства

$$\det A_i(v+w) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\ a_{1\sigma 1}\cdot\ldots\cdot(v_{\sigma s}+w_{\sigma s})\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma n} = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\ b_{1\sigma 1}\cdot\ldots\cdot b_{s\sigma s}\cdot\ldots\cdot\sigma b_{n\sigma n} + \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\ c_{1\sigma 1}\cdot\ldots\cdot c_{s\sigma s}\cdot\ldots\cdot c_{n\sigma n} = = \det A_i(w) + \det A_j(v).$$

Свойство доказано.

Свойство 8 *Если к некоторой строке матрицы A прибавить линейную комбинацию других строк, то определитель не изменится.*

Доказательство. Следует, из свойств 5 и 7.

Свойство 9

$$\det(a_{ij}) = \det\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \ldots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & * \\ 0 & 0 & \ldots & * \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdot\ldots\cdot\lambda_n.$$

Доказательство. Найдем подстановки σ такие, что

$$\sigma 1 \geqslant 1, \quad \sigma 2 \geqslant 2, \quad \ldots, \quad \sigma n \geqslant n,$$

ведь иначе $a_{1\sigma 1}a_{2\sigma 2}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma n} = 0$. Из последнего уравнения следует $\sigma n = n$. Тогда $\sigma(n-1) = n-1$. Продолжая, получим, что $\sigma = \varepsilon$.

Следовательно, $\det(a_{ij}) = \operatorname{sgn}\varepsilon a_{11}\cdot\ldots\cdot a_{nn} = \lambda_1\lambda_2\cdot\ldots\cdot\lambda_n$.

Свойство доказано.

упражнения

3.10 Найдите определители матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & \dots & 3 \end{pmatrix}$$

3.11 Найдите определители матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 10 \\ 1 & \dots & 1 & 100 & 1 \\ 1 & \dots & 1000 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 10^n & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{pmatrix}$$

1.2.8 Существование и единственность: случай n переменных

Рассмотрим связь между системой линейных уравнений и определителем ее матрицы.

Пусть из некоторой системы линейных уравнений элементарными преобразованиями получена система линейных уравнений в ступенчатом виде. Путь A — матрица первоначальной системы, B — ступенчатой системы.

Из свойств 3, 5 и 8 определителя следует, что матрица A вырождена если и только если B вырождена.

Также верно, что матрица A невырождена если и только если B невырождена.

Теперь выведем критерий существования и единственности решения системы линейных уравнений из n уравнений с n переменными.

Из метода Гаусса мы знаем, что решение системы системы в ступенчатом виде из n уравнений с n переменными существует и единственно тогда и только тогда, когда система не имеет свободных переменных.

Критерием последнего утверждения для систем в ступенчатом виде является условие того, что все диагональные элементы верхнетреугольной матрицы B системы не равны нулю.

Это равносильно тому, что определитель верхнетреугольной матрицы B невырожден.

Таким образом, мы доказали теорему

Теорема 5 ***(Невырожденность как критерий существования и единственности)*** *Система линейных уравнений из n уравнений с n переменными имеет решение, и это решение единственно если и только если определитель матрицы системы невырожден.*

1.2.9 Теорема Лаплас

Определения 13 *Выберем в матрице A по k произвольных строк и столбцов. Из элементов стоящих на пересечении этих строк и столбцов можно составить новую матрицу, которую называют подматрицей A. Определитель подматрицы A называется минором.*

Выбросим из матрицы A строку с номером i и столбцом j. Определитель полученной подматрицы называется минором элемента a_{ij}. Обозначим через M_{ij}. Выражение $(-1)^{i+j}\det M_{ij}$ назыветя алгебраическим дополнением. Обозначается через A_{ij}.

Докажем важную теорему.

Теорема 6 (Лаплас) *Определитель матрицы можно разложить по строке следующим образом:*

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

для любой строки i.

Заметим, что по свойству 1 можно разлагать не только по строке, но и по любому столбцу матрицы.

Прежде чем доказывать теорему Лапласа, докажем следующую техническую лемму.

Лемма 12 *Если матрица содержит строку, состоящую из единственного ненулевого элемента a_{ij}, то определитель этой матрицы равен произведению этого элемента и ее алгебраического дополнения.*

Доказательство. Последовательно меняем i-ую строку со всеми последующими строками и j-ый столбец со всеми последующими столбцами. По свойству 3 знак определителя изменится $n-i+n-j = 2n-(i+j)$ раз. Четность числа $2n-(i+j)$ совпадает с четностью $i+j$. Также вынесем a_{ij} за пределы определителя по свойству 5.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ & & \dots & & \\ 0 & ... & a_{ij} & ... & 0 \\ & & \dots & & \\ a_{n1} & ... & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} & a_{1j} \\ \dots & ... & \dots & \dots \\ a_{n1} & ... & a_{nn} & a_{nj} \\ 0 & ... & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Покажем, что полученная матрица имеет определитель равный M_{ij}. Введем преобозначение

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \dots & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{1j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_{nj} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Почти все слагаемые суммы

$$\det(b_{ij}) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \, b_{1\sigma 1} \cdot \ldots \cdot b_{n\sigma n}.$$

равны нулю, кроме соответствующих $\sigma \in S_n$ таким, что $\sigma n = n$.

Пусть $\mu \in S_{n-1}$ определен $\mu k = \sigma k$, $k = 1, \ldots, n-1$. Тогда число инверсий μ и σ совпадают. Следовательно, $\operatorname{sgn}\sigma = \operatorname{sgn}\mu$.

Теперь ясно, что каждое слагаемое минора $\operatorname{sgn}\mu\, b_{1\mu 1} b_{2\mu 2} \cdot \ldots \cdot b_{n-1\mu(n-1)}$ совпадает с $\operatorname{sgn}\sigma\, b_{1\sigma 1} b_{2\sigma 2} \cdot \ldots \cdot b_{n-1\sigma(n-1)} b_{n\sigma n}$.

Таким образом,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ & & \ldots & & \\ 0 & \ldots & a_{ij} & \ldots & 0 \\ & & \ldots & & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{ij} A_{ij}.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы Лапласа. По свойству 7 определитель $\det A$ разлагается в следующую сумму.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

По лемме 12 эта сумма равна

$$a_{i1} A_{i1} + \ldots + a_{in} A_{in}.$$

Теорема доказана

✎ упражнения

3.12 Не решая саму систему, выясните существование и единственность решения системы линейных уравнений.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

3.13 Найдите определители матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 10 \\ 1 & \dots & 1 & 100 & 1 \\ 1 & \dots & 1000 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 10^n & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{pmatrix}.$$