ФГАОУ ВПО СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. К. АММОСОВА
Институт математики и информатики
Кафедра алгебры и геометрии

Определители матриц n-го порядка

Якутск 2011

0.0.1 Определители матриц $n \times n$

Далее рассмотрим примеры нахождения определителей матриц $n \times n$.

пример Найдем определитель матрицы

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{[\frac{n}{2}]} a_{1n} a_{2n-1} \cdot \ldots \cdot a_{n1}.$$

При четном n достаточно $\frac{n}{2} = [\frac{n}{2}]$ перестановок, при нечетном n — $\frac{n-1}{2} = [\frac{n-2}{2}]$.

пример

Пусть

$$I_n = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & & 0 \\ 0 & 1 & 2 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}, \quad I'_{n-1} = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда определитель I_n удовлетворяет рекуррентному соотношению $I_n = 2I_{n-1} - 3I_{n-2}$ и начальному условию $I_1 = 2$ и $I_2 = 1$.

Доказательство. Разложим I_n по первой строке по Лапласу: $I_n = 2I_{n-1} - 3I'_{n-1}$. В свою очередь I'_{n-1} разложим по первому столбцу: $I'_{n-1} = I_{n-2}$. Тогда $I_n = 2I_{n-1} - 3I_{n-2}$. Равенства $I_1 = 2$ и $I_2 = 1$ легко проверяются прямыми вычислениями. Лемма или теорема доказана

пример Верно равенство

$$\prod_{i>j} (x_i - x_j) = D_n = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Вычтем первую строку из каждой k-й строки ниже, умножим на x_1^{k-1}. В результате обнулим первый столбец ниже элемента 1. В результате разложения определителя по первому столбцу достаточно найти определитель

$$\det\begin{pmatrix} x_2-x_1 & \dots & x_n-x_1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-1}-x_1^{n-1} & \dots & x_n^{n-1}-x_1^{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$\prod_{i=2}^{n}(x_i-x_1)\det\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_2+x_1 & \dots & x_n+x_1 \\ \vdots & & \vdots \\ Q_{k-2}(x_2,x_1) & \dots & Q_{k-2}(x_n,x_1) \end{pmatrix}.$$

Напомним, что $a^k-b^k=(a-b)Q_{k-1}(a,b)$, где $Q_{k-1}(a,b)=a^{k-1}+a^{k-2}b+a^{k-3}b^2+\ldots+ab^{k-2}+b^{k-1}$.

Из равенства $Q_{k-1}(a,b)-bQ_{k-2}(a,b)=a^{k-1}$ следует, что вычитая из каждой строчки

упражнения

3.14 Найдите определители матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 1 & 2 & \dots & -1+n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & \dots & n^2 \\ 1 & 2 & 9 & \dots & n^2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix},$$

3.15 Найдите определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & \sin 2 & \sin 3 & \dots & \sin n \\ 1 & 2 & \sin 3 & \dots & \sin n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & \sin n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

3.16 Найдите определители матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & \dots & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 2 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \end{pmatrix}.$$

3.17 Найдите определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 27 & \dots & 3^n \\ 3 & 3 & 27 & \dots & 3^n \\ 3 & 9 & 9 & \dots & 3^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3 & 9 & 27 & \dots & 3^{n-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 20 & \dots & 20 & 20 & 20 \\ 0 & \dots & 0 & x & -x \\ 0 & \dots & x & -x & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.18 Найдите определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & \dots & 2^n \\ 2 & 2 & 8 & \dots & 2^n \\ 2 & 4 & 4 & \dots & 2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 4 & 8 & \dots & 2^{n-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 4 & \dots & 4 \\ 4 & 5 & \dots & 4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 4 & 4 & \dots & 5 \end{pmatrix}.$$

0.1 Матрицы и операции над ними

Определение 1 *Сложением матриц* $(a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n}$ *одинаковой размерности называется матриц* $(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$.

Произведением матрицы на число $\lambda(a_{ij})_{m\times n}$ *называется следующая матрица* $(\lambda a_{ij})_{m\times n}$.

Произведением матрицы $(a_{ij})_{m\times n}$ *и* $(b_{ij})_{r\times s}$ *определено, если число столбцов* n *первого сомножителя равно числу строк* r *второго сомножителя. Произведением* $(a_{ij})_{m\times n}$ *и* $(b_{ij})_{r\times s}$ *называется матрица* $(c_{ij})_{m\times s}$ *такая, что*

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}.$$

Очевидно, что матрицы с одинаковыми размерами с операцией сложения составляют коммутативную группу, т.е. имеют место свойства: Для любых матриц A и B одинакового размера $A + B = B + A$. Для любых матриц A, B, C одинакового размера $A + (B + C) = (A + B) + C$. Таблица заполненная нулями является нулевой.

Относительно произведения матриц сложнее. Справедлива теорема.

Теорема 1 *Множество*

1) Для матриц A, B, C *подходящих размеров* $A(BC) = (AB)C$.

2) Существуют матрицы A, B *такие, что* $AB \neq BA$.

Свойства дистрибутивности матриц: 1) Для матриц A, B, C *подходящих размеров*

$$A(B + C) = AB + AC.$$

Матрица называется *квадратной,* если число ее строк равно числу столбцов.

Диагональю квадратной матрицы $(a_{ij})_{n\times n}$ называются элементы матрицы a_{ii}, $i = \overline{1, n}$.

Диагональной матрицей называется матрица с нулевыми элементами вне диагонали. Обозначается как

$$\mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n),$$

где $a_{ii} = \lambda_i$, $i = \overline{1, n}$.

Матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

называется *единичной.* Легко проверить,что произведение любой квадратной матрицы A на единичную матрицу соответствующей размерности равно самой матрице $A = AE = EA$. Элементы единичной матрицы обозначают, как

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ если } i \neq j, \\ 1, \text{ если } i = j. \end{cases}$$

Теорема 2 *Для любых квадратных матриц справедливо равенство*

$$\det AB = \det A \cdot \det B.$$

0.1.1 Обратные матрицы

Определение 2 *Матрица B такая, что $AB = BA = E$ называется обратной матрицей матрицы A. Обозначается через A^{-1}.*

Невырожденным называется квадратная матрица с ненулевым определителем.

Теорема 3 *Пусть $A = (a_{ij})_{n\times n}$ невырожденная квадратная матрица.*

Тогда матрица

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\det A} & \dots & \frac{A_{n1}}{\det A} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\det A} & \dots & \frac{A_{nn}}{\det A} \end{pmatrix}$$

является обратной матрицы A.

Доказательство. Пусть $(c_{ij})_{n\times n} = (a_{ij})_{n\times n} \times (\frac{A_{ji}}{\det A})_{n\times n}$. Докажем, что $c_{ij} = \delta_{ij}$.

Рассмотрим $c_{ij} = \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}$. По теореме Лапласа сумма $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}$ является разложением определителя матрицы с двумя совпадающими строками, если $i \neq j$; и матрицы A, если $i = j$Лемма или теорема доказана

Мы показали, что каждая невырожденная матрица имеет обратную матрицу. Из теоремы 2 следует, что вырожденные матрицы не имеют обратных.

упражнения

5.10 Покажите, что вырожденные матрицы не имеют обратных.

5.11 Покажите, что $A^{-1}b$ является решением уравнения $Ax = b$.

5.12 Напишите система линейных уравнений???

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -4 \\ 13 & 6 & -4 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 7 & 7 \\ 3 & 5 & -3 \end{array}\right)$$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью нахождения обратной матрицы.

5.13 Приведите пример уравнения $Ax = b$, которое не имеет решения bA^{-1}.

0.1.2 Матричные уравнения

Теперь любую систему л.у. вида (**??**) можно представить в виде равенства матрицы b с произведением матриц A и b.

$$Ax = b,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

упражнения

5.10 Проверьте правильность сказанного выше утверждения.

5.11 Во сколько раз меньше символов требуется, чтобы записать уравнение в матричном виде?

5.12 Что такое "деление матрицы на матрицу"?

0.2 Формула Крамера

Теорема 4 (Крамер) *Рассмотрим систему линейных уравнений $Ax = b$:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & .. & a_{1n} \\ & .. & \\ a_{n1} & .. & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ .. \\ b_n \end{pmatrix}$$

с невырожденной квадратной матрицей A. Пусть A_i получена из A заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

Тогда система $Ax = b$ имеет единственной решение:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{\det A_1}{\det A}, \frac{\det A_2}{\det A}, \ldots, \frac{\det A_n}{\det A}\right).$$

Доказательство. Докажем справедливость формулы Крамера. Матрица $A^{-1}b$ размерности $n \times 1$ является решением система линейных уравнений??? Используя предыдущую теорему, получим решение

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_{ji}}{\det A} b_i, \text{ для } j = \overline{1, n}.$$

Сумма $\sum_{i=1}^{n} A_{ji} b_i$ является разложением определителя матрицы A_j по j-му столбцу — столбцу свободных членов.

Докажем единственность решения. Пусть сущестует еще одно решение x'. Тогда

$$x' = A^{-1}Ax' = A^{-1}b = x$$

Лемма или теорема доказана.